Über einige Verallgemeinerungen der Riemann-Stieltjes-Integrale auf Matrixfunktionen

Werner Fieger

1961

Über einige Verallgemeinerungen der Riemann-Stieltjes-Integrale auf Matrixfunktionen.

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

Vorgelegt
von

Werner Fieger

aus
München

Juni 1961

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

1. Berichterstatter: Proiessor Dr. H. Richter .
2. Berichterstatter: Professor Dr. M. Kneser .

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Juli 1961 .

§ 1. Problemstellung und Zusammenfassung.

Das erste der drei in dieser Arbeit untersuchten matriziellen Riemann-Stieltjes-Integrale tritt in der Theorie der stochastischen Integrale als Kovarianzmatrix auf. Über die beiden anderen matriziellen Riemann-Stieltjes-Integrale hat Bellman die beiden Abhandlungen (2) und (3)[+] veröffentlicht. Bellman hat allerdings bei einem seiner Beweise ein falsches Lemma benutzt. Wir zeigen, daß sich diese matriziellen Riemann-Stieltjes-Integrale mit anderen Hilfsmitteln ohne die in den Sätzen von Bellman enthaltenen Einschränkungen behandeln und berechnen lassen.

Zunächst führen wir einige Bezeichnungen und Begriffe ein, die wir in dieser Arbeit benützen. Mit D, F, H, (d_{ik}), (u_{ik}) bezeichnen wir n-reihige Matrizen. Für die Spur von F schreiben wir $sp\{F\}$; für das in der i-ten Zeile und in der k-ten Spalte stehende Element von F schreiben wir $(F)_{ik}$, soweit die Elemente von F nicht etwa durch die Gleichung $F = (f_{ik})$ direkt angegeben sind. Die n-reihige Einheitsmatrix bezeichnen wir mit E_n . Unter $\sqrt{D}$ verstehen wir die eindeutig bestimmte positiv semidefinite Quadratwurzel einer positiv semidefiniten Matrix D, unter $l_i(H)$ den durch die zusätzliche Vereinbarung $l_1(H) \geqslant l_2(H) \geqslant \ldots \geqslant l_n(H)$ eindeutig festgelegten i-ten Eigenwert einer hermitischen Matrix H. Matrizen, deren Elemente über dem Intervall $[a,b]$ erklärte, reell- oder komplexwertige Funktionen der Variablen t sind, nennen wir Matrixfunktionen [++]. Wir schreiben solche Matrixfunktionen in der Form C(t), D(t), F(t), $(u_{ik}(t))$. Wenn alle Elemente einer Matrixfunktion stetig resp. $\mathfrak{L}$-meßbar sind, nennen wir diese Matrixfunktion stetig resp. $\mathfrak{L}$-meßbar. Mit D(t) bezeichnen wir durchwegs eine Matrixfunktion, die

[+] Arabische Zahlen in runden Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis. Bei allen Zitaten werden die in den einzelnen Veröffentlichungen speziell angewandten Kapitel- und Satznumerierungen benützt.

[++] Der hier eingeführte Begriff der Matrixfunktion ist zu unterscheiden von einem anderen, in der Literatur ebenfalls häufig mit dem Ausdruck "Matrixfunktion" bezeichneten Funktionsbegriff, bei dem matrizielle Argumente benutzt werden.

für jedes t ihres Definitionsbereiches eine positiv semidefinite Matrix ergibt, mit U(t) eine Matrixfunktion, die für jedes zugelassene t eine unitäre Matrix darstellt. Weiter verstehen wir unter C(t) immer eine Matrixfunktion, für die $C(t) - C(v)$ für beliebige t, v mit $a \leq v < t \leq b$ positiv semidefinit ist. D(t) nennen wir eine positiv semidefinite, U(t) eine unitäre und C(t) eine monoton nicht fallende Matrixfunktion. Wir schreiben für die Spur $sp\{C(t)\}$ einer vorgegebenen monoton nicht fallenden Matrixfunktion C(t) kurz s(t) und für die Eigenwerte $l_i(D(t))$ einer vorgegebenen positiv semidefiniten Matrixfunktion D(t) zur Abkürzung $l_i(t)$. Einige dieser Bezeichnungen und Begriffe verwenden wir sinnentsprechend für Matrixfunktionen, die über allgemeineren Grundmengen definiert sind.

Den von der Gesamtheit der n-Tupeln von reellen Zahlen gebildeten n-dimensionalen Vektorraum bezeichnen wir mit R^n, den von der Gesamtheit der n-Tupeln von komplexen Zahlen gebildeten Vektorraum mit C^n. Die Elemente des R^n und des C^n schreiben wir mit kleinen deutschen Buchstaben. $\mathfrak{B}$ ist der σ-Körper der Borel'schen Teilmengen des R^1, $\mathfrak{B}(a,b)$ der σ-Körper der Borel'schen Teilmengen des Intervalls $(a,b]$.

Unter einer Intervallunterteilung Z des endlichen Intervalls $(a,b]$ verstehen wir eine endliche Anzahl von Teilungspunkten $t_1, \ldots, t_{r-1}$ und von dazu passenden Zwischenpunkten $v_1, \ldots, v_r$ mit $a =: t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{r-1} < t_r := b$ und $t_{\rho-1} \leq v_\rho \leq t_\rho$ für $\rho = 1, \ldots, r$. Bei einigen der von uns untersuchten Probleme spielt die Lage der Zwischenpunkte keine Rolle; wir wollen in diesen Fällen stillschweigend $v_\rho = t_\rho$ setzen. Die zu Z gehörenden, links offenen, rechts abgeschlossenen Intervalle $(t_{\rho-1}, t_\rho]$ bezeichnen wir mit I_ρ; als Feinheit von Z definieren wir $l(Z) := \max\{t_\rho - t_{\rho-1} : \rho = 1, \ldots, r\}$. Statt der Bezeichnung "Intervallunterteilung" gebrauchen wir auch teilweise den Ausdruck "Unterteilung". Soweit wir Folgen $Z^1, Z^2, \ldots, Z^m, \ldots$ von Intervallunterteilungen von $(a,b]$ betrachten, schreiben wir die oben eingeführten, zu Z^m gehörigen Begriffe in der Gestalt t_ρ^m, v_ρ^m, I_ρ^m, $r(m)$, $l(Z^m)$. Ist Z eine Intervallunterteilung von $(a,b]$, und sind a_1, a_2 zwei Werte mit $a \leq a_1 < a_2 \leq b$, so verstehen wir unter $Z(a_1,a_2)$ die Unter-

teilung von $(a_1,a_2]$, die als Teilungspunkte alle der in (a_1,a_2) liegenden Punkte t_ρ und als Zwischenpunkte alle der in $[a_1,a_2]$ liegenden Punkte v_ρ und eventuell zur Ergänzung a_1 und a_2 hat.
Zur Klassifizierung der Unstetigkeitsstellen einer Funktion $f(t)/[a,b]$ setzen wir

$$z_L(t_o) := \limsup_{t \nearrow t_o} |f(t) - f(t_o)| \quad ; \quad z_L(a) := 0$$

$$z_R(t_o) := \limsup_{t \searrow t_o} |f(t) - f(t_o)| \quad ; \quad z_R(b) := 0 \ .$$

$t_o \in [a,b]$ heißt rechtsseitige Unstetigkeitsstelle, falls $z_L(t_o) = 0 < z_R(t_o)$; linksseitige und beidseitige Unstetigkeitsstellen sind analog definiert. Entsprechende Bezeichnungen benützen wir für Matrixfunktionen $F(t) = (f_{ik}(t))$, wobei wir $z_L(t_o)$ durch $z_L(t_o) :=$ $\max_{i,k} \limsup_{t \nearrow t_o} |f_{ik}(t) - f_{ik}(t_o)|$ und $z_R(t_o)$ durch die analoge Definition erklären.

Wir führen die Ausdrücke

$$S_1(Z) := \sum_{\rho=1}^{r} F(v_\rho) \cdot \big(H(t_\rho) - H(t_{\rho-1})\big) \cdot G(v_\rho) \quad ,$$

$$S_2(Z) := \sum_{\rho=1}^{r} \sqrt{C(t_\rho) - C(t_{\rho-1})} \cdot F(v_\rho) \cdot \sqrt{C(t_\rho) - C(t_{\rho-1})} \quad ,$$

$$S_{3,i}(Z) := \sum_{\rho=1}^{r} f(v_\rho) \cdot 1_i\big(C(t_\rho) - C(t_{\rho-1})\big)$$

ein, wobei in der letzten Definition $f(t)$ eine über $[a,b]$ reell- oder komplexwertige Funktion ist, und für i die Werte $1, \ldots, n$ zugelassen sind. Die trivialen Fälle, daß $H(t)$ und $C(t)$ über $[a,b]$ konstant sind, können wir bei unseren Untersuchungen ausschließen. Für die Matrixfunktion $C(t)$ bedeutet dies, daß wir $s(b) > s(a)$ voraussetzen.
Mit den Ausdrücken $S_1(Z)$, $S_2(Z)$, $S_{3,i}(Z)$ definieren wir die von uns untersuchten matriziellen Integrale.

(1.1) Definition:
Wenn $S_1 := \lim_{l(Z) \to 0} S_1(Z)$ existiert und endlich ist, sagen wir, daß das matrizielle Riemann-Stieltjes-Integral $\int_a^b F(t) \cdot H(dt) \cdot G(t)$ existiert und den Wert S_1

hat. Ebenso definieren wir

$$\int_a^b \sqrt{C(dt)}\cdot F(t)\cdot\sqrt{C(dt)} := \lim_{l(Z)\to 0} S_2(Z) \quad \text{und}$$

$$\int_a^b f(t)\cdot 1_i(C(dt)) := \lim_{l(Z)\to 0} S_{\zeta,i}(Z) \quad , \text{ falls}$$

diese Grenzwerte existieren und endlich sind.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, hinreichende Bedingungen für die Existenz dieser matriziellen Riemann-Stieltjes-Integrale aufzustellen. Wir beweisen, daß $\int_a^b F(t)\cdot C(dt)\cdot G(t)$ existiert, wenn $F(t)$ und $G(t)$ in $[a,b]$ stetig sind, und $C(t)$ monoton nicht fallend ist. Weiter beweisen wir, daß $\int_a^b \sqrt{C(dt)}\cdot F(t)\cdot\sqrt{C(dt)}$ und $\int_a^b f(t)\cdot 1_i(C(dt))$ existieren, wenn $F(t)$ und $f(t)$ in $[a,b]$ stetig sind, und $C(t)$ monoton nicht fallend ist und keine beidseitigen Unstetigkeitspunkte hat. Soweit die Integrale $\int_a^b \sqrt{C(dt)}\cdot F(t)\cdot\sqrt{C(dt)}$ und $\int_a^b f(t)\cdot 1_i(C(dt))$ nicht existieren, zeigen wir, für welche speziellen Folgen von Unterteilungen $Z^1, Z^2, \ldots$ $S_2(Z^m)$ und $S_{\zeta,i}(Z^m)$ für $m\to\infty$ Grenzwerten zustreben. Für die Werte der drei matriziellen Riemann-Stieltjes-Integrale $\int_a^b F(t)\cdot C(dt)\cdot G(t)$, $\int_a^b \sqrt{C(dt)}\cdot F(t)\cdot\sqrt{C(dt)}$ und $\int_a^b f(t)\cdot 1_i(C(dt))$ bzw. für die Grenzwerte von $S_2(Z^m)$ und $S_{\zeta,i}(Z^m)$ geben wir drei einfach zu berechnende Integrale an. Bei der Herleitung dieser Ergebnisse benützen wir vor allem Hilfsmittel aus der Matrizenrechnung und aus der Integrationstheorie.

Wir gehen folgendermaßen vor:

In § 2 behandeln wir einige Sätze aus der Matrizenrechnung und ziehen daraus Folgerungen für monoton nicht fallende und für positiv semidefinite Matrixfunktionen. Am Schluß

von § 2 zeigen wir an einem Beispiel, daß das von Bellman in (2) und (3) benutzte Lemma falsch ist.

In § 3 beweisen wir für Lebesgue-Stieltjes-Integrale und für Intervallmaße zwei Sätze. Wir definieren ferner ein s(t)-Integral bezüglich einer monoton nicht fallenden Funktion s(t) und geben einige Eigenschaften dieses s(t)-Integrals an.

In § 4 leiten wir zunächst für monoton nicht fallende Matrixfunktionen eine Integraldarstellung her. Weiter geben wir dann für die eingeführten matriziellen Riemann-Stieltjes-Integrale Existenzbedingungen und einfache Integraldarstellungen an.

In § 5 führen wir eine Verallgemeinerung auf kompakte Hausdorff-Räume durch.

§ 2. Hilfsmittel aus der Matrizenrechnung.

Wir geben zunächst einen Satz an, der trotz seines einfachen Beweises für diese Arbeit von grundlegender Bedeutung ist.

(2.1) Satz:
Für die Elemente d_{ik} der positiv semidefiniten Matrix D gilt

$$|d_{ik}| \leq l_1(D) \leq sp\{D\} \quad .$$

Beweis:
Zu $D = (d_{ik})$ gibt es eine unitäre Matrix $U = (u_{ik})$, so daß $D = U^* \cdot (l_i(D)) \cdot U$ mit der aus den Eigenwerten $l_i(D) \geq 0$ gebildeten Diagonalmatrix $(l_i(D))$ ist. Aus

$$d_{ik} = \sum_{\nu=1}^{n} l_\nu(D) \cdot \overline{u}_{\nu i} \cdot u_{\nu k}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \left(\overline{u}_{\nu i} \cdot \sqrt{l_\nu(D)}\right) \cdot \left(u_{\nu k} \cdot \sqrt{l_\nu(D)}\right)$$

folgt nach der Schwarz'schen Ungleichung

$$|d_{ik}|^2 \leq \sum_{\nu=1}^{n} l_\nu(D) \cdot |u_{\nu i}|^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{n} l_\nu(D) \cdot |u_{\nu k}|^2$$

$$\leq \left(\max_\nu l_\nu(D)\right)^2 = \left(l_1(D)\right)^2 \quad .$$

Der zweite Teil der Ungleichung ergibt sich aus $l_i(D) \geq 0$ und aus $l_1(D) + l_2(D) + \ldots + l_n(D) = sp\{D\}$.

Die folgenden beiden Sätze zeigen zwei Wege zur Berechnung der Eigenwerte einer hermitischen Matrix H .

(2.2) Satz:
Für die Eigenwerte $l_1(H), \ldots, l_n(H)$ einer hermitischen Matrix H gilt die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{j} l_i(H) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{j} \mathfrak{x}_i^* \cdot H \cdot \mathfrak{x}_i \right\}$$

für $j = 1, \ldots, n$, wobei dieses Supremum über alle Systeme von j n-dimensionalen, orthonormalen Vektoren $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_j$ zu nehmen ist. Sind $\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_n$ zu $l_1(H), \ldots, l_n(H)$ gehörende, orthonormierte Eigen-

vektoren von H , so wird dieses Supremum für $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{z}_j = \mathfrak{w}_j$ angenommen.

(2.3) Satz:
Ist H eine hermitische Matrix, und ist für jeden p-dimensionalen linearen Teilraum L_p des C^n

$$h(L_p) := \inf\{\mathfrak{w}^* H \mathfrak{w} : \mathfrak{w} \in L_p \;\&\; |\mathfrak{w}| = 1\}$$

definiert, so ist

$$l_i(H) = \sup\{h(L_i) : L_i \text{ i-dimensionaler Teilraum des } C^n\}.$$

Die Aussagen dieser beiden einfachen Sätze sind gegenüber unitären Transformationen invariant. Man braucht sie daher nur für den Fall zu beweisen, daß H eine Diagonalmatrix ist. Für diesen Spezialfall sind aber beide Sätze unschwer einzusehen.+
Zwei einfache Folgerungen fassen wir zusammen in

(2.4) Satz:
Sind H_1, H_2 zwei hermitische Matrizen, so gilt für $j = 1, \ldots, n$

$$\sum_{i=1}^{j} l_i(H_1+H_2) \leq \sum_{i=1}^{j} l_i(H_1) + \sum_{i=1}^{j} l_i(H_2) \quad .$$

Ist die Differenz $H_1 - H_2$ positiv semidefinit, so gilt für $j = 1, \ldots, n$

$$l_j(H_1) \geq l_j(H_2) \quad .$$

Der erste Teil dieses Satzes folgt aus Satz (2.2), der zweite Teil aus Satz (2.3).
Der nächste Satz enthält zwei von uns später benötigte Abschätzungen.

(2.5) Satz:
Sind D_1, D_2 zwei positiv semidefinite Matrizen, und ist $D_1 - D_2$ ebenfalls positiv semidefinit, so ist auch die Matrix $\sqrt{D_1} - \sqrt{D_2}$ positiv semidefinit, und es gilt $\operatorname{sp}\{\sqrt{D_1} - \sqrt{D_2}\} \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\operatorname{sp}\{D_1\} - \operatorname{sp}\{D_2\}}$.
Insbesondere ist $\operatorname{sp}\{\sqrt{D_1}\} \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\operatorname{sp}\{D_1\}}$.

+ Für Satz (2.2) findet man in (5) einen Beweis durchgeführt.

Beweis:

1. Aus den von Löwner in (9) bewiesenen Sätzen folgt, daß $\sqrt{D_1} - \sqrt{D_2}$ positiv semidefinit ist.

2. Für $i = 1, \ldots, n$ gilt nach Satz (2.4) $l_i(D_1) \geq l_i(D_2)$ und damit

$$sp\{\sqrt{D_1} - \sqrt{D_2}\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{l_i(D_1)} - \sqrt{l_i(D_2)}\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{l_i(D_1) - l_i(D_2)}$$

$$\leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{sp\{D_1\} - sp\{D_2\}} \quad .$$

Speziell für $D_2 = 0$ folgt die behauptete Abschätzung von $sp\{\sqrt{D_1}\}$.

Für monoton nicht fallende Matrixfunktionen C(t) gilt

(2.6) Satz:

Ist $C(t) = (c_{ik}(t))$ eine in $-\infty < t < +\infty$ erklärte, monoton nicht fallende Matrixfunktion, so sind die Elemente $c_{ik}(t)$ über jedem endlichen Intervall von beschränkter Schwankung, und das Stetigkeitsverhalten von C(t) ist in jedem Punkt gleich dem Stetigkeitsverhalten der Spur $s(t) = sp\{C(t)\}$; insbesondere hat C(t) höchstens abzählbar unendlich viele Unstetigkeitsstellen.

Beweis:

Ist $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = b$, so gilt nach Satz (2.1)

$$\sum_{\varrho=1}^{r} |c_{ik}(t_\varrho) - c_{ik}(t_{\varrho-1})| \leq \sum_{\varrho=1}^{r} (s(t_\varrho) - s(t_{\varrho-1}))$$

$$= s(b) - s(a) \quad ;$$

die Funktionen $c_{ik}(t)$ sind also über $[a,b]$ von beschränkter Schwankung.

Die Behauptungen über das Stetigkeitsverhalten von C(t) ergeben sich aus den ebenfalls aus Satz (2.1) folgenden Ungleichungen

$$|c_{ik}(t) - c_{ik}(t-0)| \leq s(t) - s(t-0) \quad \text{und}$$

$$|c_{ik}(t+0) - c_{ik}(t)| \leq s(t+0) - s(t) \quad .$$

Einige Aussagen über stetige, positiv semidefinite Matrixfunktionen fassen wir zusammen in

(2.7) Satz:
Ist $D(t) = D(t_1,\dots,t_p)$ eine in einer gewissen offenen Menge G des R^p definierte, positiv semidefinite, stetige Matrixfunktion, so sind die Eigenwerte $l_1(t), \dots, l_n(t)$ von $D(t)$ stetige Funktionen von t ; weiter ist auch die positiv semidefinite Quadratwurzel $\sqrt{D(t)}$ eine stetige Matrixfunktion von t .

Beweis:

1. Die Stetigkeit der $l_i(t)$ folgt unmittelbar aus Satz (2.2).
2. Zu jedem $t_0 \in G$ gibt es wegen der Stetigkeit von $sp\{D(t)\}$ eine kompakte Umgebung $M(t_0)$, in der die Spur $sp\{D(t)\}$ beschränkt ist; damit sind nach Satz (2.5) und Satz (2.1) auch die Elemente der Matrix $D_1(t) := \sqrt{D(t)}$ in $M(t_0)$ beschränkt. Zu jeder Folge t_m mit $t_m \to t_0$ für $m\to\infty$ gibt es daher eine Teilfolge t_{m_μ}, für die $\lim\limits_{\mu\to\infty} D_1(t_{m_\mu})$ existiert.

   Es sei nun t_m eine beliebige Folge mit $t_m \to t_0$ und $D_1(t_m) \to D_1$ für $m\to\infty$. Dann ist D_1 positiv semidefinit. Wegen der Eindeutigkeit der positiv semidefiniten Quadratwurzel $D_1(t_0) = \sqrt{D(t_0)}$ folgt aus

   $$(D_1)^2 = \lim_{m\to\infty} D_1(t_m)^2 = \lim_{m\to\infty} D(t_m) = D(t_0) = D_1(t_0)^2 \quad ,$$

   daß $D_1 = D_1(t_0)$ ist.

Für meßbare, positiv semidefinite Matrixfunktionen gilt

(2.8) Satz:
Es seien X eine beliebige Menge mit den Elementen x und $\mathfrak{A}$ ein σ-Körper über X . Ist D(x) eine über X definierte, positiv semidefinite, $\mathfrak{A}$-meßbare Matrixfunktion, so sind die Eigenwerte $l_1(x), \dots, l_n(x)$ von D(x) und die Elemente von $\sqrt{D(x)}$ $\mathfrak{A}$-meßbare Funktionen von x . Ferner gibt es eine unitäre, $\mathfrak{A}$-meßbare Matrix U(x) mit $D(x) = U(x)^* \cdot (l_i(x)) \cdot U(x)$.

Beweis:

1. Es sei $D(x) = (d_{ik}(x))$. Da für $j = 1, \dots, n$

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{j} \eta_i^* \cdot D(x) \cdot \eta_i : \eta_1, \dots, \eta_j \text{ orthonormal}\right\}$$

stetig von den n^2 $\mathfrak{K}$-meßbaren Funktionen $d_{ik}(x)$ abhängt, sind die Eigenwerte $l_1(x), \dots, l_n(x)$ $\mathfrak{K}$-meßbare Funktionen von x .

2. Für $i = 1, \dots, n-1$ seien definiert die Mengen $K_{i1} := \{x : l_i(x) > l_{i+1}(x)\}$ und $K_{i2} := \overline{K_{i1}}$.

Damit zerlegen wir X in eine direkte Summe von Mengen aus $\mathfrak{K}$: $X = \sum_{r_\nu = 1,2} K_{1r_1} \cdot K_{2r_2} \cdot \dots \cdot K_{n-1r_{n-1}}$.

Wir schreiben dann

$K_{1r_1} \cdot \dots \cdot K_{n-1r_{n-1}} = K_{j_1 1} \cdot \dots \cdot K_{j_q 1} \cdot K_{j_{q+1} 2} \cdot \dots \cdot K_{j_{n-1} 2}$

mit $j_1 < j_2 < \dots < j_q$, $j_{q+1} < \dots < j_{n-1}$, $n-1 \geq q \geq 0$,

und definieren auf $K_{j_1 1} \cdot \dots \cdot K_{j_q 1} \cdot K_{j_{q+1} 2} \cdot \dots \cdot K_{j_{n-1} 2}$ das Polynom p(t;x) durch die Lagrange'sche Interpolationsformel

$$p(t;x) := \sum_{\varphi=1}^{q} \sqrt{l_{j_\varphi}(x)} \cdot g_\varphi(t; l_{j_1}(x), \dots, l_{j_q}(x), l_n(x)) + \sqrt{l_n(x)} \cdot g_{q+1}(t; l_{j_1}(x), \dots, l_{j_q}(x), l_n(x))$$

$$\text{mit} \quad g_\varphi(t; t_1, \dots, t_{q+1}) := \prod_{\substack{\psi=1 \\ \psi \neq \varphi}}^{q+1} \frac{t - t_\psi}{t_\varphi - t_\psi} \quad .$$

p(t;x) ist ein für alle $x \in X$ definiertes Polynom in t, dessen Koeffizienten $\mathfrak{K}$-meßbare Funktionen von x sind; es gilt $p(l_i(x);x) = \sqrt{l_i(x)}$ für $i = 1, \dots, n$ und für alle $x \in X$. Wegen $\sqrt{D(x)} = p(D(x);x)$ ist also $\sqrt{D(x)}$ eine $\mathfrak{K}$-meßbare Matrixfunktion von x .

3. Für jedes $x \in X$ existiert eine Darstellung

$$D(x) = \sum_{i=1}^{n} l_i(x) \cdot \breve{w}_i(x) \cdot \breve{w}_i^*(x)$$

mit orthonormalen $\breve{w}_1(x), \dots, \breve{w}_n(x)$. Es seien die Komponenten der Vektoren $\breve{w}_i(x)$ bereits $\mathfrak{K}$-meßbar für alle $i < j$. Dann ist wegen der $\mathfrak{K}$-Meßbarkeit von D(x) die folgende Matrix $\mathfrak{K}$-meßbar:

$D_j(x) :=$

$$\lim_{m\to\infty} \left[\frac{1}{1+l_j(x)}\cdot\left(E_n + D(x) - \sum_{i<j}(1+l_i(x))\cdot\breve{w}_i(x)\cdot\breve{w}_i^*(x)\right)\right]^m ,$$

wobei dieser Limes sicher existiert.
Gilt für ein x : $l_j(x) = l_{j+s}(x) > l_{j+s+1}(x)$ mit $0 \leq s \leq n-j-1$, so ist für dieses x

$$D_j(x) = \breve{w}_j(x)\cdot\breve{w}_j^*(x) + \ldots + \breve{w}_{j+s}(x)\cdot\breve{w}_{j+s}^*(x) \quad ;$$

für ein x mit $l_j(x) = l_n(x)$ gilt

$$D_j(x) = \breve{w}_j(x)\cdot\breve{w}_j^*(x) + \ldots + \breve{w}_n(x)\cdot\breve{w}_n^*(x) \quad .$$

Für jedes $x \in X$ ist daher jede Spalte von $D_j(x)$ eine Linearkombination der zum Eigenwert $l_j(x)$ gehörenden Eigenvektoren. Jede nicht verschwindende Spalte ist also ein zum Eigenwert $l_j(x)$ gehörender Eigenvektor, der zu den Vektoren $\breve{w}_1(x)$, ... , $\breve{w}_{j-1}(x)$ orthogonal ist. Durch Aufspaltung von X in höchstens n $\mathfrak{K}$-meßbare Teilmengen, auf denen jeweils eine geeignete Spalte von $D_j(x)$ nicht verschwindet, können wir $\breve{w}_j(x)$ als eine dieser nicht verschwindenden Spalten $\mathfrak{K}$-meßbar und orthogonal zu den $\breve{w}_i(x)$ mit $i<j$ hinzuwählen. Nach höchstens n Schritten sind alle $\breve{w}_i(x)$ $\mathfrak{K}$-meßbar gewählt.

Das folgende Beispiel zeigt, daß sich bei stetigem, positiv semidefinitem D(t) die Matrixfunktion U(t) nicht immer stetig wählen läßt. Es sei

$$D(t) := \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+t \end{pmatrix} & \text{für } t \geq 0 , \\ \begin{pmatrix} 1+\frac{t}{2} & -\frac{t}{2} \\ -\frac{t}{2} & 1+\frac{t}{2} \end{pmatrix} & \text{für } -1 \leq t < 0 . \end{cases}$$

Diese Matrixfunktion D(t) ist in ihrem gesamten Definitionsbereich positiv semidefinit und stetig; die Eigenwerte von D(t) sind

$$l_1(t) = \begin{cases} 1+t \\ 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad l_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 , \\ 1+t & \text{für } -1 \leq t < 0 . \end{cases}$$

Für $t \neq 0$ sind die zugehörigen Eigenvektoren bis auf Fak-

toren eindeutig bestimmt:

$$\breve{w}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \breve{w}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{für } t > 0 \text{ und}$$

$$\breve{w}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \breve{w}_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{für } -1 \leq t < 0 \ .$$

Man kann daher U(t) in $t = 0$ nicht stetig wählen.

Bellman führt in (2) und (3) einen Beweis für die Existenz von $\lim_{l(Z)\to 0} S_2(Z)$ durch unter der zusätzlichen Bedingung, daß F(t) eine stetige Matrixfunktion ist, und daß C(t) eine stetige, monoton nicht fallende Matrixfunktion ist. Er gebraucht dabei ein Lemma, gemäß dem wegen der Stetigkeit von C(t) sich $C(t_2) - C(t_1)$ mit Hilfe einer unitären, in t_1 und t_2 stetigen Matrixfunktion $U(t_1,t_2)$ diagonalisieren läßt. Dieses Lemma ist jedoch falsch.
Wir geben dazu ein Beispiel an. Die durch

$$C(t) := \begin{cases} \begin{pmatrix} 1+t & 0 \\ 0 & 1+t^2 \end{pmatrix} & \text{für } t \geq 0 \ , \\ \begin{pmatrix} 1+\frac{t}{2} & -\frac{t}{2} \\ -\frac{t}{2} & 1+\frac{t}{2} \end{pmatrix} & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

definierte Matrixfunktion C(t) ist monoton nicht fallend und stetig. Für s, t mit $0 < s < t$ hat $C(t) - C(s)$ die Eigenwerte $t - s$, $t^2 - s^2$ und die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, für s, t mit $s < 0$, $t = 1$ die Eigenwerte $1 - s$, 1 und die Eigenvektoren $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die unitäre Matrix U(t,s) ist daher im Punkt $(t,s) = (1,0)$ nicht stetig wählbar.
In dem von Bellman angegebenen Beweis befindet sich also eine Lücke, die sich nicht schließen läßt.

§ 3. Hilfsmittel aus der Integrationstheorie.

Der erste Satz dieses Paragraphen ermöglicht es uns, das Lebesgue-Stieltjes-Integral[+] $\int_{(a,b]} g(t)\cdot\sigma(dt)$ beliebig genau durch geeignete Riemann-Stieltjes-Summen zu approximieren. Wir formulieren zunächst

(3.1) Definition:
Es sei σ ein Intervallmaß über $(a,b]$. Ist $g(t)$ σ-integrabel über $(a,b]$, und ist Z eine Intervallunterteilung von $(a,b]$, so definieren wir

$$A(g,\varepsilon,Z) :=$$

$$\sum_{\rho=1}^{r} \left\{ t : t \in I_\rho \;\&\; \left| g(t)\cdot\sigma(I_\rho) - \int_{I_\rho} g(\tau)\cdot\sigma(d\tau) \right| > \varepsilon\cdot\sigma(I_\rho) \right\} .$$

Sind die Zwischenpunkte $v_1, \ldots, v_r$ in $(a,b] - A(g,\varepsilon,Z)$ enthalten, so unterscheidet sich dann die Riemann-Stieltjes-Summe $\sum_{\rho=1}^{r} g(v_\rho)\cdot\sigma(I_\rho)$ von dem Integral $\int_{(a,b]} g(t)\cdot\sigma(dt)$ um höchstens $\varepsilon\cdot\sigma((a,b])$.
Als ersten Satz beweisen wir

(3.2) Satz:
Unter den Voraussetzungen von Definition (3.1) gilt
$\lim_{l(Z)\to 0} \sigma(A(g,\varepsilon,Z)) = 0$ für jedes $\varepsilon > 0$.

Den Beweis für diesen Satz formulieren wir so, daß wir ihn auch für die in § 5 angegebene Verallgemeinerung gebrauchen können.

Beweis:

1. Zu jeder Intervallunterteilung Z von $(a,b]$ und zu jeder σ-meßbaren Teilmenge $K \subset (a,b]$ definieren wir
$d(K;Z) := \min \left\{ \sigma(K \dot{-} \sum_{\nu\le\nu_0} I_{\rho_\nu}) \;;\; 0 \le \nu_0 \le r \right\}$.

   Es sei $\eta > 0$ beliebig vorgegeben. Zu jedem σ-meßbaren

[+] In dieser Arbeit werden mengen- und maßtheoretische Begriffe im Sinne der Definitionen in (10) gebraucht.

$K \subset (a,b]$ gibt es eine relativ zu $(a,b]$ offene Menge G mit $K \subset G \subset (a,b]$ und mit $\sigma(G \cdot \overline{K}) < \eta$. Definieren wir zu G und zu Z die Menge $J(G;Z) := \sum_{\rho \text{ mit } I_\rho \subset G} I_\rho$,

so gibt es ein $\delta > 0$ mit $\sigma(G \cdot \overline{J(G;Z)}) < \eta$ für Z mit $l(Z) < \delta$. wegen $K \dot{+} J(G;Z) = K \cdot \overline{J(G;Z)} + \overline{K} \cdot J(G;Z) \subset G \cdot \overline{J(G;Z)} \dot{+} \overline{K} \cdot G$ erhalten wir $d(K;Z) < 2 \cdot \eta$ für $l(Z) < \delta$.

Es gilt also für jedes σ-meßbare K

$$\lim_{l(Z) \to 0} d(K;Z) = 0 \quad .$$

2. Es gelten die Teilmengenrelationen

a. $A(\lambda \cdot f, \varepsilon, Z) \subset A(f, (|\lambda|+1)^{-1} \cdot \varepsilon, Z)$,

b. $A(f+g, \varepsilon, Z) \subset A(f, \frac{\varepsilon}{2}, Z) \dot{+} A(g, \frac{\varepsilon}{2}, Z)$,

c. $A(f, \varepsilon, Z) \subset A(g, \frac{\varepsilon}{3}, Z)$, falls für $t \in (a,b]$ stets $|f(t) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ gilt,

d. $A(f, \varepsilon, Z) \subset A(g, \frac{\varepsilon}{3}, Z) \dot{+} C(f(t), g(t))$ mit $\sigma(C(f(t), g(t))) \leq \delta$, falls $\int_{(a,b]} |f(t) - g(t)| \cdot \sigma(dt) \leq \frac{\varepsilon \cdot \delta}{6}$ gilt.

Die Beziehungen a. und b. sind trivial. Die Relationen c. und d. ergeben sich aus

$$A(f, \varepsilon, Z) \subset$$

$$\sum_{\rho=1}^{r} \{ t : t \in I_\rho \,\&\, |g(t) \cdot \sigma(I_\rho) - \int_{I_\rho} g(\tau) \cdot \sigma(d\tau)| + |g(t) - f(t)| \cdot \sigma(I_\rho) + \int_{I_\rho} |g(\tau) - f(\tau)| \cdot \sigma(d\tau) > \varepsilon \cdot \sigma(I_\rho) \} \subset$$

$$\subset A(g, \tfrac{\varepsilon}{3}, Z) \dot{+} \{ t : |f(t) - g(t)| > \tfrac{\varepsilon}{3} \} \dot{+} \sum_{(+)} I_\rho \quad ,$$

wobei die mit (+) bezeichnete Summe über alle ρ mit $\int_{I_\rho} |g(\tau) - f(\tau)| \cdot \sigma(d\tau) > \frac{\varepsilon}{3} \cdot \sigma(I_\rho)$ zu erstrecken ist.

Setzen wir nämlich in d.

$$C(f(t), g(t)) := \sum_{(+)} I_\rho \dot{+} \{ t : |f(t) - g(t)| > \tfrac{\varepsilon}{3} \} \quad ,$$

so gilt wegen $\sigma(\{ t : |f(t) - g(t)| > \frac{\varepsilon}{3} \}) \leq \frac{\delta}{2}$ und

$\sigma(\sum_{(+)} I_\rho) \leq \frac{\delta}{2}$ die Abschätzung $\sigma\big(C(f(t),g(t))\big) \leq \delta$.

3. Nach 2.d. genügt es, Satz (3.2) für beschränkte, σ-meßbare Funktionen zu beweisen. Da wir beschränkte, σ-meßbare Funktionen beliebig genau gleichmäßig durch σ-meßbare Treppenfunktionen mit endlich vielen Treppen approximieren können, brauchen wir nach 2.c. nur solche Treppenfunktionen zu betrachten. Nach 2.a. und 2.b. können wir uns beim Beweis sogar auf charakteristische Funktionen $\chi_K(t)$ von σ-meßbaren Mengen K beschränken.

4. Für die charakteristischen Funktionen zweier σ-meßbarer Mengen K, K_1 gilt

$$\int_{(a,b]} |\chi_K(t) - \chi_{K_1}(t)| \cdot \sigma(dt) = \sigma(K \dot{+} K_1) \quad .$$

Ist K_1 die direkte Summe einiger zu Z gehörender I_ρ, so ist $A(\chi_{K_1}, \varepsilon, Z) = \emptyset$.

Nach 2.d. ist daher für jedes K

$$\sigma\big(A(\chi_K, \varepsilon, Z)\big) \leq \frac{\delta}{\varepsilon} \cdot d(K;Z) \quad .$$

Hieraus ergibt sich nach Beweisteil 1 die Behauptung von Satz (3.2) .

In diesem Beweis wurde nur in Teil 1 die Tatsache benützt, daß die Grundmenge, über der g(t) definiert ist, und für die Z eine Unterteilung ist, die Menge (a,b] ist. Die übrigen Beweisteile gelten genauso für beliebige Grundmengen.

Mittels Satz (3.2) beweisen wir

(3.3) Satz:

Es seien σ ein über (a,b] definiertes Intervallmaß und $(a,b] = B_1 + B_2 + \ldots + B_p$ eine Zerlegung von (a,b] in disjunkte σ-meßbare Mengen $B_1, \ldots, B_p$. Weiter seien vorgegeben eine Folge $Z^1, Z^2, \ldots$ von Unterteilungen von (a,b] mit $\lim_{m\to\infty} l(Z^m) = 0$ und eine Folge von σ-meßbaren Mengen $K_1, K_2, \ldots$ mit $K_m \subset (a,b]$ und $\sigma(K_m) \to \sigma((a,b])$ für $m\to\infty$. Es gibt dann Mengen $J_1^m, \ldots, J_p^m$, die Vereinigungsmengen gewisser I_ρ^m sind, und die die folgenden Relationen erfüllen:

a. $J_\varphi^m \cdot J_{\varphi'}^m = \emptyset$ für $\varphi \neq \varphi'$;

b. $I_\varrho^m \cdot B_\varphi \cdot K_m \neq \emptyset$ für jedes I_ϱ^m mit $I_\varrho^m \subset J_\varphi^m$;

c. $\sigma\big((a,b] - \sum_{\varphi=1}^{p} J_\varphi^m\big) \leq \sum_{\varphi=1}^{p} \sigma(B_\varphi \dot{+} J_\varphi^m) \to 0$

bei $m \to \infty$.

Beweis:

1. Zu jeder Unterteilung Z definieren wir für $\varphi = 1, \ldots, p$ die Menge $J_\varphi(Z)$ als die direkte Summe aller I_ϱ mit $\sigma(I_\varrho) \neq 0$ und mit $\sigma(B_\varphi \cdot I_\varrho) \geq \frac{2}{3} \cdot \sigma(I_\varrho)$. Wie man ohne weiteres sieht, gilt dann

$$J_\varphi(Z) \cdot J_{\varphi'}(Z) = \emptyset \quad \text{für} \quad \varphi \neq \varphi' .$$

Führen wir für $\varphi = 1, \ldots, p$ die Menge J_φ^m als die direkte Summe aller I_ϱ^m mit $I_\varrho^m \subset J_\varphi(Z^m)$ und mit $B_\varphi \cdot I_\varrho^m \cdot K_m \neq \emptyset$ ein, so sind die Eigenschaften a. und b. erfüllt.

2. Es gilt

$$B_\varphi \dot{+} J_\varphi^m = B_\varphi \cdot \overline{J_\varphi^m} + \overline{B_\varphi} \cdot J_\varphi^m$$

$$\subset B_\varphi \cdot \overline{J_\varphi(Z^m)} \dot{+} B_\varphi \cdot \overline{K_m} \dot{+} \overline{B_\varphi} \cdot J_\varphi(Z^m)$$

$$\subset \big(B_\varphi \dot{+} J_\varphi(Z^m)\big) \dot{+} B_\varphi \cdot \overline{K_m} \quad .$$

Also ist

$$\sigma\big((a,b] - \sum_{\varphi=1}^{p} J_\varphi^m\big) \leq \sum_{\varphi=1}^{p} \sigma(B_\varphi \dot{+} J_\varphi^m) \leq$$

$$\leq \sum_{\varphi=1}^{p} \sigma\big(B_\varphi \dot{+} J_\varphi(Z^m)\big) + \sigma\big((a,b] - K_m\big) \quad ,$$

so daß nur noch $\lim_{m\to\infty} \sigma\big(B_\varphi \dot{+} J_\varphi(Z^m)\big) = 0$ zu beweisen bleibt.

3. Es seien $g_1(t), \ldots, g_p(t)$ die charakteristischen Funktionen von $B_1, \ldots, B_p$. Ist $I_\varrho \not\subset J_\varphi(Z)$, so gilt $\sigma(I_\varrho) - \sigma(B_\varphi \cdot I_\varrho) > \frac{1}{3} \cdot \sigma(I_\varrho)$ oder $\sigma(I_\varrho) = 0$ und damit $B_\varphi \cdot I_\varrho \subset A(g_\varphi, \frac{1}{3}, Z) + N$ mit $N := \sum I_\varrho$, wobei diese Summe über alle ϱ mit $\sigma(I_\varrho) = 0$ zu erstrecken ist, also $B_\varphi \cdot \overline{J_\varphi(Z)} \subset A(g_\varphi, \frac{1}{3}, Z) + N$.

Ist $I_\varrho \subset J_\varphi(Z)$, so gilt $\sigma(B_\varphi \cdot I_\varrho) \geq \frac{2}{3} \cdot \sigma(I_\varrho) > \frac{1}{3} \cdot \sigma(I_\varrho)$

und damit $\overline{B_\varphi} \cdot I_\varphi \subset A(g_\varphi, \frac{1}{3}, Z)$, also $\overline{B_\varphi} \cdot J_\varphi(Z) \subset$
$\subset A(g_\varphi, \frac{1}{3}, Z)$. Daraus folgt $B_\varphi \dotplus J_\varphi(Z) \subset$
$\subset A(g_\varphi, \frac{1}{3}, Z) + N$ mit $\sigma(N) = 0$ für $\varphi = 1, \ldots, p$.
Durch Anwendung von Satz (3.2) erhalten wir daher aus den Beweisteilen 2 und 3 die Behauptung c. .

Wir verallgemeinern nun das Lebesgue-Stieltjes-Integral über links offenen, rechts abgeschlossenen Intervallen zu einem Integral bezüglich einer monoton nicht fallenden Funktion s(t), die für den Rest dieses Paragraphen durchgängig als über $[a,b]$ definiert angesehen wird.
Zunächst formulieren wir einige Definitionen.

(3.4) Definition:
Ist s(t) eine über $[a,b]$ erklärte, monoton nicht fallende Funktion, so führen wir die Sprungfunktionen $\delta_L(t) := s(t) - s(t-0)$ und $\delta_R(t) := s(t+0) - s(t)$ ein, wobei $s(a-0) := s(a)$ und $s(b+0) := s(b)$ gesetzt ist. Weiter definieren wir die Mengen

$$S^L := \{t : t \in [a,b] \;\&\; \delta_L(t) \neq 0\} ,$$

$$S^R := \{t : t \in [a,b] \;\&\; \delta_R(t) \neq 0\} ,$$

$$S^{L,R} := S^L \cdot S^R \quad \text{und} \quad S := S^L \dotplus S^R .$$

Mit $s_0(t)$ bezeichnen wir den durch die Forderung $s_0(a) = s(a)$ eindeutig bestimmten Stetigkeitsanteil von s(t) und mit σ_0 das durch $s_0(t)$ auf $\mathfrak{B}(a,b)$ definierte Maß.

Da s(t) als monotone Funktion höchstens in abzählbar vielen Punkten unstetig ist, haben die Mengen S^L, S^R, $S^{L,R}$ und S höchstens abzählbar viele Elemente. Mit den in Definition (3.4) eingeführten Funktionen läßt sich s(t) in der Form

$$s(t) = s_0(t) + \sum_{\tau \in \overline{S^L \cdot (a,t]}} \delta_L(\tau) + \sum_{\tau \in \overline{S^R \cdot [a,t)}} \delta_R(\tau)$$

schreiben.

(3.5) Definition:
f(t) nennen wir eine über $[a,b]$ s(t)-meßbare Funktion, wenn f(t) über $[a,b] - S^{L,R}$ eindeutig und $\mathfrak{B}(a,b)$-meß-

bar ist, für jedes t aus $S^{L,R}$ jedoch zwei nicht notwendig verschiedene Funktionswerte $f^L(t)$ und $f^R(t)$ besitzt.

Zur Vereinfachung benutzen wir

(3.6) Definition:
Ist f(t) über [a,b] s(t)-meßbar, so erklären wir die beiden über [a,b] eindeutig bestimmten Funktionen $f_L(t)$, $f_R(t)$ durch

$$f_L(t) := \begin{cases} f^L(t) & \text{für } t \in S^{L,R} \\ f(t) & \text{für } t \in [a,b] - S^{L,R} \end{cases},$$

und

$$f_R(t) := \begin{cases} f^R(t) & \text{für } t \in S^{L,R} \\ f(t) & \text{für } t \in [a,b] - S^{L,R} \end{cases}.$$

Wir verallgemeinern über endlichen, links offenen, rechts abgeschlossenen Intervallen das Lebesgue-Stieltjes-Integral nun folgendermaßen:

(3.7) Definition:
Eine s(t)-meßbare Funktion f(t) nennen wir über [a,b] s(t)-integrabel, wenn $\int_{(a,b]-S} f(t)\cdot\sigma_o(dt)$ als Lebesgue-Stieltjes-Integral existiert, und wenn die Summen $\sum_{t\in S^L} f_L(t)\cdot\delta_L(t)$, $\sum_{t\in S^R} f_R(t)\cdot\delta_R(t)$ absolut konvergieren. Als s(t)-Integral von f(t) definieren wir dann

$$\int_a^b f(t)\cdot s(dt) := \int_{(a,b]-S} f(t)\cdot\sigma_o(dt) + \sum_{t\in S^L} f_L(t)\cdot\delta_L(t) + \sum_{t\in S^R} f_R(t)\cdot\delta_R(t) \quad .^+$$

+ Die Teilung eines jeden beidseitigen Unstetigkeitspunktes t_o von s(t) in zwei "Punkthälften" mit den respektiven Funktionswerten $f^L(t_o)$, $f^R(t_o)$ ist auch bei dem in (11) mit Definition 6* eingeführten Perron-Stieltjes-Integral zu finden. Ist s(t) monoton nicht fallend, so steht dieses Perron-Stieltjes-Integral mit dem hier eingeführten s(t)-Integral in folgender Beziehung:
Ist f(t) s(t)-integrabel über [a,b], so existiert auch das bezüglich s(t) über [a,b] gebildete Perron-Stieltjes-Integral. Ist f(t) dem Absolutbetrag nach beschränkt, so folgt aus der Existenz des Perron-Stieltjes-Integrals die Existenz des s(t)-Integrals. Falls beide Integrale existieren, haben sie den gleichen Wert.

Im nächsten Satz geben wir zwei einfache Eigenschaften dieses Integrals[+] an, die sich unmittelbar aus Definition (3.7) ableiten lassen.

(3.8) Satz:
Ist $f(t)$ über $[a,b]$ $s(t)$-integrabel, und ist $a < c < b$, so gilt

$$\int_a^c f(\tau)\cdot s(d\tau) = \lim_{t \nearrow c} \int_a^t f(\tau)\cdot s(d\tau) + f_L(c)\cdot \delta_L(c)$$

$$= \lim_{t \searrow c} \int_a^t f(\tau)\cdot s(d\tau) - f_R(c)\cdot \delta_R(c) \quad .$$

Der nächste Satz zeigt, wie man aus den Werten des $s(t)$-Integrals wieder die Werte des Integranden berechnen kann.

(3.9) Satz:
Ist $f(t)$ über $[a,b]$ $s(t)$-integrabel mit
$\Psi(t) := \int_a^t f(\tau)\cdot s(d\tau)$ für $a \leq t \leq b$, so gilt

$$f(t) = \lim_{\tau \to t} \frac{\Psi(\tau) - \Psi(t)}{s(\tau) - s(t)} \quad \text{für } \sigma_o\text{-fast alle } t \text{ aus } [a,b] - S \ ,$$

$$f_L(t) = \lim_{\tau \nearrow t} \frac{\Psi(\tau) - \Psi(t)}{s(\tau) - s(t)} \quad \text{für alle } t \in S^L$$

und

$$f_R(t) = \lim_{\tau \searrow t} \frac{\Psi(\tau) - \Psi(t)}{s(\tau) - s(t)} \quad \text{für alle } t \in S^R \ .$$

Die Menge der Punkte t aus $(a,b] - S$, die Punkte eines nicht punktförmigen Intervalls mit $s(t) = \text{const.}$ sind, und für die damit $\lim_{\tau \to t} \frac{\Psi(\tau) - \Psi(t)}{s(\tau) - s(t)}$ nicht existiert, ist eine Menge vom σ_o-Maß Null.

[+] Ist $s(t)$ in $[a,b]$ von rechts stetig, und bezeichnet $\sigma / \mathfrak{L}(a,b)$ das durch $s(t)$ über $\mathfrak{L}(a,b)$ eindeutig bestimmte Maß, so existiert das $s(t)$-Integral $\int_a^b f(t)\cdot s(dt)$ dann und nur dann, wenn das Lebesgue-Stieltjes-Integral $\int_{(a,b]} f(t)\cdot \sigma(dt)$ existiert; im Falle ihrer Existenz haben beide Integrale den gleichen Wert.

Satz (3.9) zeigt, daß f(t) bis auf eine σ_0-Nullmenge von Stetigkeitspunkten von s(t) durch die Werte des s(t)-Integrals $\int_a^t f(\tau)\cdot s(d\tau)$ bestimmt ist.

Beweis:

1. Für den Fall s(t) = t + const. ist Satz (3.9) eine Folge des für Lebesgue-Integrale geltenden Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung [+]. Um den allgemeinen Fall auf diesen Spezialfall zurückzuführen, definieren wir über dem Intervall $[s(a),s(b)]$ [++]

$$g(y) := \begin{cases} f_L(t_y) \text{ , falls zu } y \text{ ein } t_y \text{ mit } s(t_y-0) < y < s(t_y) \text{ existiert,} \\ f_R(t_y) \text{ , falls zu } y \text{ ein } t_y \text{ mit } s(t_y) < y < s(t_y+0) \text{ existiert,} \\ f_L(t_y) \text{ , falls zu } y \text{ genau ein } t_y \text{ mit } s(t_y) = y \text{ existiert,} \\ 0 \text{ , falls } y \text{ keine dieser drei vorgenannten Bedingungen erfüllt.} \end{cases}$$

g(y) ist durch diese Definition in $[s(a),s(b)]$ eindeutig erklärt; für jeden Stetigkeitspunkt t, der kein Punkt eines nicht punktförmigen Intervalls mit s(t) = const. ist, gilt $g(s(t)) = f(t)$. Da s(t) höchstens abzählbar viele Unstetigkeitspunkte und höchstens abzählbar viele nicht punktförmige Intervalle mit s(t) = const. hat, und da $f_L(t)$ $\mathfrak{L}(a,b)$-meßbar ist, ist g(y) $\mathfrak{L}(s(a),s(b))$-meßbar. Die Menge der y , für die g(y) durch die vierte Festsetzung der vorhergehenden Definition gleich Null gesetzt ist, hat das L-Maß Null;

[+] Siehe (1) 7.5.7. , insbesondere 7.5.7.2. .

[++] Die in der Fußnote auf Seite 18 angegebene Beziehung zwischen dem s(t)-Integral und dem Perron-Stieltjes-Integral kann man mit dieser Definition auf die in (7) angegebene Beziehung zwischen dem Lebesgue-Integral und dem Perron-Integral zurückführen. - Ähnliche Definitionen werden bei der Zurückführung des Lebesgue-Stieltjes-Integrals bzw. des Perron-Stieltjes-Integrals auf das Lebesgue-Integral bzw. das Perron-Integral in der Literatur öfters angewandt.

daher folgt aus der Existenz von $\int_a^b f(t)\cdot s(dt)$ die Existenz des Lebesgue-Integrals $\int_{[s(a),s(b)]} g(y)\cdot L(dy)$.

Wenn wir $\Gamma(y) := \int_{[s(a),y]} g(u)\cdot L(du)$ setzen, gilt für jedes $t\in[a,b]$ $\Gamma(s(t)) = \Psi(t)$.

2. Es sei t_o ein Stetigkeitspunkt von $s(t)$, der nicht innerer Punkt oder Eckpunkt eines echten Intervalls mit $s(t) = \text{const.}$ ist, und $y_o := s(t_o)$. Wir erhalten dann leicht

$$\liminf_{y\to y_o} \frac{\Gamma(y_o) - \Gamma(y)}{y_o - y} \leq \liminf_{t\to t_o} \frac{\Psi(t_o) - \Psi(t)}{s(t_o) - s(t)} \leq$$

$$\leq \limsup_{t\to t_o} \frac{\Psi(t_o) - \Psi(t)}{s(t_o) - s(t)} \leq \limsup_{y\to y_o} \frac{\Gamma(y_o) - \Gamma(y)}{y_o - y} .$$

Die Ableitung von $\Gamma(y)$ existiert aber bis auf eine L-Nullmenge von y-Werten und ist L-fast überall gleich $g(y)$.

Da jedes Konstanzintervall von $s(t)$ und jede abzählbare Punktmenge das σ_o-Maß Null haben, und da das $s(t)$-Urbild jeder L-Nullteilmenge von $[s(a),s(b)]$ eine σ_o-Nullteilmenge von $[a,b]$ ist, existiert also

$\lim_{\tau\to t} \frac{\Psi(\tau) - \Psi(t)}{s(\tau) - s(t)}$ für σ_o-fast alle Stetigkeitspunkte von $s(t)$ und ist σ_o-fast überall gleich $f(t)$.

3. Für die in $[a,b]$ liegenden Unstetigkeitspunkte von $s(t)$ ergibt sich die Behauptung aus Satz (3.8).

Wir führen nun das Integral einer Matrixfunktion ein.

(3.10) Definition:

Als Lebesgue-Stieltjes-Integral resp. $s(t)$-Integral der Matrixfunktion $D(t) = (d_{ik}(t))$ definieren wir die Matrix der Lebesgue-Stieltjes-Integrale resp. $s(t)$-Integrale der Elemente von $D(t)$:

$$\int_K D(t)\cdot\sigma(dt) := \left(\int_K d_{ik}(t)\cdot\sigma(dt)\right) \quad \text{resp.}$$

$$\int_a^b D(t)\cdot s(dt) := \left(\int_a^b d_{ik}(t)\cdot s(dt)\right) ,$$ sofern die rechts stehenden Integrale der Elemente $d_{ik}(t)$ existieren.

§ 4. Existenzsätze für matrizielle Riemann-Stieltjes-Integrale.

Bevor wir in diesem Paragraphen die Existenzsätze für matrizielle Riemann-Stieltjes-Integrale formulieren und beweisen, geben wir eine Integraldarstellung für monoton nicht fallende Matrixfunktionen an.

Zunächst beschränken wir uns auf von rechts stetige Matrixfunktionen.

(4.1) Satz:
Ist $C(t)$ eine in $-\infty < t < +\infty$ erklärte, von rechts stetige, monoton nicht fallende Matrixfunktion, und bezeichnet $\sigma/\mathfrak{S}$ das über $\mathfrak{S}$ durch $s(t) = sp\{C(t)\}$ als maßdefinierende Funktion erklärte Maß, so ist $C(t)$ darstellbar in der Form

$$C(t) = C(a_o) + \int_{\{a_o < \tau \leq t\}} D(\tau) \cdot \sigma(d\tau)$$

bei beliebig gewähltem $a_o < t$.
$D(t)$ ist eine in $-\infty < t < +\infty$ bis auf eine σ-Nullmenge eindeutig bestimmte, Baire'sche, positiv semidefinite Matrixfunktion mit $sp\{D(t)\} = 1$.

Beweis:

1. Beschränken wir uns auf ein beliebiges, endliches Intervall $(a,b]$, so existiert zu jedem Element $c_{ik}(t)$ von $C(t)$ eine über $\mathfrak{S}(a,b)$ erklärte, komplexwertige, endliche, σ-additive Mengenfunktion σ_{ik} mit

$$\sigma_{ik}((c,d]) = c_{ik}(d) - c_{ik}(c)$$

für $a \leq c < d \leq b$.
Denn nach Satz (2.6) gibt es zu jedem $c_{ik}(t)$ vier monoton nicht fallende, von rechts stetige Funktionen ${}_1c_{ik}(t), \dots, {}_4c_{ik}(t)$ mit
$c_{ik}(t) = {}_1c_{ik}(t) - {}_2c_{ik}(t) + i \cdot {}_3c_{ik}(t) - i \cdot {}_4c_{ik}(t)$.
Zu diesen Funktionen ${}_1c_{ik}(t), \dots, {}_4c_{ik}(t)$ existieren endliche Maße ${}_1\sigma_{ik}, \dots, {}_4\sigma_{ik}$, die alle über $\mathfrak{S}(a,b)$ definiert sind, und für die

$${}_j\sigma_{ik}((c,d]) = {}_jc_{ik}(d) - {}_jc_{ik}(c)$$

für $j = 1, \dots, 4$ gilt.

$\sigma_{ik}(B) := {}_1\sigma_{ik}(B) - {}_2\sigma_{ik}(B) + i\cdot{}_3\sigma_{ik}(B) - i\cdot{}_4\sigma_{ik}(B)$ hat also die geforderten Eigenschaften.

2. Jede Menge $B \in \mathfrak{B}(a,b)$ ist darstellbar in der Form

$B = \sum_{r=1}^{\infty}\cdot \coprod_{s=1}^{\infty}\cdot J_{r,s} + N$, wobei die $J_{r,s}$ Vereinigungsmengen von endlich vielen, links offenen, rechts abgeschlossenen Teilintervallen von $(a,b]$ sind, und N eine σ-Nullmenge und gleichzeitig eine ${}_j\sigma_{ik}$-Nullmenge für $j = 1, \dots, 4$; $i, k = 1, \dots, n$ ist.

Da für komplexwertige, endliche, σ-additive Mengenfunktionen der aufsteigende und der absteigende Limessatz gelten, folgt aus der nach Satz (2.1) gültigen Ungleichung $|\sigma_{ik}((c,d])| \leq \sigma((c,d])$ für beliebige $B \in \mathfrak{B}(a,b)$ die Ungleichung $|\sigma_{ik}(B)| \leq \sigma(B)$.

Nach dem Satz von Radon-Nikodym gibt es daher komplexwertige, über $(a,b]$ erklärte, $\mathfrak{B}(a,b)$-meßbare Funktionen $d_{ik}(t)$ mit $\sigma_{ik}(B) = \int_B d_{ik}(t)\cdot\sigma(dt)$ für $B \in \mathfrak{B}(a,b)$. Die Beschränkung auf das Intervall $(a,b]$ können wir nun fallen lassen; mit $D(t) := (d_{ik}(t))$ haben wir dann die gesuchte Integraldarstellung.

3. Daß die Matrixfunktion $D(t)$ bis auf eine σ-Nullmenge eindeutig bestimmt ist, folgt aus Satz (3.9). Weiter ist $D(t)$ σ-fast überall positiv semidefinit mit $\mathrm{sp}\{D(t)\} = 1$, da $D(t)$ σ-fast überall gleich dem Grenzwert von positiv semidefiniten Matrizen der Form $\frac{1}{s(\tau) - s(t)}\cdot\big(C(\tau) - C(t)\big)$ ist.

Die Verallgemeinerung von Satz (4.1) auf beliebige monoton nicht fallende Matrixfunktionen ist

(4.2) Satz:
Ist $C(t)$ eine in $-\infty < t < +\infty$ definierte, monoton nicht fallende Matrixfunktion mit der Spur $s(t)$, so gibt es eine in $-\infty < t < +\infty$ erklärte, $s(t)$-integrable Matrixfunktion $D(t)$ mit

$$C(t) = C(a_0) + \int_{a_0}^{t} D(\tau)\cdot s(d\tau)$$

bei beliebig gewähltem $a_0 < t$.
$D(t)$ ist bis auf eine σ_0-Nullmenge von Stetigkeitspunkten von $s(t)$ eindeutig bestimmt und positiv semidefinit mit $sp\{D(t)\} = 1$.

Beweis:

Wir definieren $\Delta_L(t) := C(t) - C(t-0)$, $\Delta_R(t) := C(t+0) - C(t)$ und mit den in Definition (3.4) eingeführten Mengen S^L, S^R bei beliebig gewähltem a

$$C_1(t) := \begin{cases} \sum_{\tau\in\overline{S^L\cdot(a,t]}} \Delta_L(\tau) + \sum_{\tau\in\overline{S^R\cdot[a,t)}} \Delta_R(\tau) & \text{für } t > a \,, \\ 0 & \text{für } t = a \,, \\ -\sum_{\tau\in\overline{S^L\cdot(t,a]}} \Delta_L(\tau) - \sum_{\tau\in\overline{S^R\cdot[t,a)}} \Delta_R(\tau) & \text{für } t < a \end{cases}$$

und $C_0(t) := C(t) - C_1(t)$.
$C_0(t)$ ist eine stetige, monoton nicht fallende Matrixfunktion, die nach Satz (4.1) eine Integraldarstellung hat; $C_1(t)$ ist eine monoton nicht fallende Matrixfunktion, deren Elemente Sprungfunktionen mit höchstens abzählbar vielen Sprüngen sind, und die sich daher mit $s_1(t) := sp\{C_1(t)\}$ trivialerweise als $s_1(t)$-Integral darstellen läßt. Fassen wir diese beiden Integrale zu einem $s(t)$-Integral zusammen, so erhalten wir wegen $s(t) = sp\{C_0(t)\} + s_1(t)$ eine gesuchte Integraldarstellung.
Die weiteren Behauptungen von Satz (4.2) ergeben sich wieder aus Satz (3.9).

Ist die monoton nicht fallende Matrixfunktion $C(t)$ nur über dem Intervall $[a,b]$ erklärt, so können wir durch die zusätzliche Definition $C(t) := C(a)$ für $t < a$ und $C(t) := C(b)$ für $t > b$ $C(t)$ zu einer in $-\infty < t < +\infty$ erklärten, monoton nicht fallenden Matrixfunktion erweitern, um die Voraussetzungen von Satz (4.2) abzuschwächen.

Wir kommen nun zu den Existenzsätzen für Riemann-Stieltjes-Integrale der Form $\int_a^b F(t)\cdot H(dt)\cdot G(t)$.

(4.3) Satz:

Sind F(t), G(t) zwei über [a,b] erklärte, stetige Matrixfunktionen, und ist H(t) eine über [a,b] erklärte Matrixfunktion, deren Elemente komplexwertige Funktionen beschrankter Schwankung sind, so existiert

$$\int_a^b F(t)\cdot H(dt)\cdot G(t) \quad .$$

Der Beweis dieses Satzes erübrigt sich, da jedes der n^2 Elemente von $S_1(Z)$ gleich der Summe von n^2 Approximationssummen für gewöhnliche Riemann-Stieltjes-Integrale ist.

Die Eigenschaften des matriziellen Riemann-Stieltjes-Integrals $\int_a^b F(t)\cdot H(dt)\cdot G(t)$ kann man aus den entsprechenden Eigenschaften des gewöhnlichen Riemann-Stieltjes-Integrals leicht herleiten. So gilt zum Beispiel, daß aus der Existenz eines der beiden Integrale $\int_a^b F(t)\cdot G(dt)$, $\int_a^b F(dt)\cdot G(t)$ die Existenz des anderen Integrals folgt, und daß die Summe dieser beiden Integrale gleich $F(b)\cdot G(b) - F(a)\cdot G(a)$ ist [+].

Die Integration bezüglich einer monoton nicht fallenden Matrixfunktion behandelt der nächste Satz.

(4.4) Satz:

Sind F(t), G(t) zwei über [a,b] stetige Matrixfunktionen, und ist C(t) eine über [a,b] monoton nicht fallende Matrixfunktion, so existiert

$$\int_a^b F(t)\cdot C(dt)\cdot G(t) \quad .$$

Ist weiter D(t) die zur Integraldarstellung von C(t)

[+] In (8) findet man für die entsprechende Eigenschaft des gewöhnlichen Riemann-Stieltjes-Integrals einen Beweis, den man fast wörtlich auf die von uns hier betrachteten matriziellen Riemann-Stieltjes-Integrale übertragen kann.

gemäß Satz (4.2) gehörende Matrixfunktion, so gilt die Gleichung

$$\int_a^b F(t)\cdot C(dt)\cdot G(t) = \int_a^b F(t)\cdot D(t)\cdot G(t)\cdot s(dt) \quad .$$

Beweis:

Aus den Sätzen (2.6) und (4.3) folgt zunächst die Existenz von $\int_a^b F(t)\cdot C(dt)\cdot G(t)$.

Definieren wir zu C(t) wie im Beweis von Satz (4.2) den Stetigkeitsanteil $C_0(t)$ und den Unstetigkeitsanteil $C_1(t)$, so gilt

$$\int_a^b F(t)\cdot C(dt)\cdot G(t) = \int_a^b F(t)\cdot C_0(dt)\cdot G(t) + \int_a^b F(t)\cdot C_1(dt)\cdot G(t) \quad .$$

Das letzte Integral ist gleich dem Summenanteil von $\int_a^b F(t)\cdot D(t)\cdot G(t)\cdot s(dt)$; wegen der Stetigkeit von $C_0(t)$ ist nach bekannten Sätzen der Maßtheorie das Riemann-Stieltjes-Integral

$$\int_a^b F(t)\cdot C_0(dt)\cdot G(t)$$

gleich dem den Integralanteil von $\int_a^b F(t)\cdot D(t)\cdot G(t)\cdot s(dt)$ darstellenden Lebesgue-Stieltjes-Integral.

Nachdem wir zwei einfache Existenzsätze für Integrale der Form $\int_a^b F(t)\cdot H(dt)\cdot G(t)$ angegeben haben, suchen wir nun Bedingungen, die für die Existenz von $\int_a^b \sqrt{C(dt)}\cdot F(t)\cdot \sqrt{C(dt)}$ hinreichen.
Zunächst beweisen wir einen Hilfssatz.

(4.5) Satz:

Die Matrixfunktion C(t) sei über $[a,b]$ monoton nicht fallend, die Matrixfunktion F(t) über $[a,b]$ stetig. Weiter seien Z^1, Z^2, ... eine Folge von Unterteilungen von $(a,b]$ mit $\lim_{m\to\infty} l(Z^m) = 0$ und a_1, a_2, ... , a_{r-1} endlich viele Punkte mit $a =: a_0 < a_1 < \ldots$

$\ldots < a_{r-1} < a_r := b$. Ist keiner der Punkte $a_1, \ldots,$ a_{r-1} ein beidseitiger Unstetigkeitspunkt von $C(t)$, so folgt aus der Existenz von $\lim_{m\to\infty} S_2(Z^m(a_{\varrho-1},a_\varrho))$ für $\varrho = 1, \ldots, r$ die Existenz von $\lim_{m\to\infty} S_2(Z^m)$, und zwar gilt dann

$$\sum_{\varrho=1}^{r} \lim_{m\to\infty} S_2(Z^m(a_{\varrho-1},a_\varrho)) = \lim_{m\to\infty} S_2(Z^m) .$$

Beweis:

Wir können uns auf den Fall $r = 2$ beschränken.
Wir wollen $C(a_1) = C(a_1+0)$ annehmen.
Es seien t_1, t_2 zwei beliebige Werte mit $a \leq t_1 < a_1 < t_2 \leq b$ und v, v_1, v_2 drei Werte mit $t_1 \leq v \leq t_2$, $t_1 \leq v_1 \leq a_1$ und $a_1 \leq v_2 \leq t_2$. Aus Satz (2.1) und Satz (2.5) folgern wir mit
$f_o := \max\left\{\left|(F(t))_{ik}\right| : i, k = 1, \ldots, n;\ t\in[a,b]\right\}$
die Ungleichungen

$$\left|\left(\sqrt{C(t_2) - C(a_1)}\cdot F(v_2)\cdot\sqrt{C(t_2) - C(a_1)}\right)_{ik}\right| \leq \leq f_o\cdot n^3\cdot(s(t_2) - s(a_1)) ,$$

$$\left|\left(\sqrt{C(a_1) - C(t_1)}\cdot F(v_1)\cdot\sqrt{C(a_1) - C(t_1)} - \sqrt{C(t_2) - C(t_1)}\cdot F(v)\cdot\sqrt{C(t_2) - C(t_1)}\right)_{ik}\right| \leq$$

$$\leq 2\cdot n^3\cdot f_o\cdot\sqrt{s(t_2) - s(t_1)}\cdot\sqrt{s(t_2) - s(a_1)} + n^3\cdot(s(t_2) - s(t_1))\cdot\max\left\{\left|(F(v_1) - F(v))_{ik}\right| : i,k\right\} .$$

Diese Ausdrücke streben gegen Null, wenn t_1 und t_2 sich dem Punkt a_1 nähern. Folglich hat auch $S_2(Z^m(a,a_1)) + S_2(Z^m(a_1,b)) - S_2(Z^m)$ für $m\to\infty$ den Grenzwert Null.
Der Beweis für den Fall $C(a_1-0) = C(a_1) \neq C(a_1+0)$ ist entsprechend zu führen.

Wir dürfen also für unsere Konvergenzbeweise das Intervall $(a,b]$ durch endlich viele Stetigkeitspunkte $a_1, \ldots, a_{r-1}$ von $s(t)$ in die Intervalle $(a,a_1]$, $(a_1,a_2]$, $\ldots$, $(a_{r-1},b]$ zerlegen. Bei stetigem $F(t)$ können wir zu jedem $\varepsilon > 0$ die Werte $a_1, \ldots, a_{r-1}$ speziell so wählen, daß für

$t \in [a_{\varrho-1}, a_\varrho]$ die Ungleichung $\left|(F(t) - F(a_\varrho))_{ik}\right| < \varepsilon$ für $\varrho = 1, \ldots, r$; $i, k = 1, \ldots, n$ gilt. Die Elemente von $S_2(Z(a_{\varrho-1}, a_\varrho))$ ändern sich dann, wenn man $S_2(Z(a_{\varrho-1}, a_\varrho))$ mit der konstanten Matrix $F(a_\varrho)$ anstatt mit $F(t)$ bildet, um weniger als $n \cdot (s(a_\varrho) - s(a_{\varrho-1})) \cdot \varepsilon$. Wir können daher in unseren Existenzbeweisen über dem jeweils betrachteten Intervall $[a_{\varrho-1}, a_\varrho]$ stets $F(t) \equiv F(a_\varrho)$ annehmen.

Als ersten Existenzsatz beweisen wir

(4.6) Satz:
Ist $F(t)$ über $[a,b]$ stetig, und ist $C(t)$ über $[a,b]$ von rechts stetig und monoton nicht fallend, so existiert das matrizielle Riemann-Stieltjes-Integral $\int_a^b \sqrt{C(dt)} \cdot F(t) \cdot \sqrt{C(dt)}$. Ist $D(t)$ die zur Integraldarstellung $C(t) = C(a) + \int_a^t D(\tau) \cdot s(d\tau)$ gehörende positiv semidefinite Matrixfunktion, so ist

$$\int_a^b \sqrt{C(dt)}\, F(t)\, \sqrt{C(dt)} = \int_a^b \sqrt{D(t)} \cdot F(t)\, \sqrt{D(t)} \cdot s(dt) \quad .$$

Beweis:

1. Wir können $F(t) \equiv F$ mit $\left|(F)_{ik}\right| \leq 1$ voraussetzen. $Z^1, Z^2, \ldots$ sei eine beliebige Folge von Unterteilungen von $(a,b]$ mit $l(Z^m) \to 0$ für $m \to \infty$; $\varepsilon > 0$ sei beliebig gewählt.
In der Menge $\{D : D \text{ positiv semidefinit } \& \left|(D)_{ik}\right| \leq 1\}$ ist $\sqrt{D}$ gleichmäßig stetig. Es gibt daher ein $\eta > 0$, so daß für alle positiv semidefiniten D_1, D_2 mit $\left|(D_1)_{ik}\right| \leq 1$, $\left|(D_2)_{ik}\right| \leq 1$ und $\left|(D_1 - D_2)_{ik}\right| \leq \eta$ die Ungleichung $\left|(\sqrt{D_1} - \sqrt{D_2})_{ik}\right| < \varepsilon \cdot ((s(b) - s(a))n^3)^{-1}$ für $i, k = 1, \ldots, n$ erfüllt ist.
Bezeichnen wir mit G das durch $s(t)$ über $\mathfrak{L}(a,b)$ definierte Maß, so gilt für

$$K_m := \sum_{\varrho=1}^{r(m)} \{t : t \in I_\varrho^m \;\&\; \left|(C(t_\varrho^m) - C(t_{\varrho-1}^m) - D(t) \cdot G(I_\varrho^m))_{ik}\right| \leq \eta \cdot G(I_\varrho^m) \text{ für alle } i, k\}$$

nach Satz (3.2) $\lim_{m \to \infty} G(K_m) = G((a,b])$.

2. Es gibt endlich viele $\mathfrak{G}$-meßbare Mengen $B_1, \ldots, B_p$ mit $(a,b] = B_1 + \ldots + B_p$, so daß für jede beliebige $\mathfrak{G}$-meßbare Teilmenge K von $(a,b]$

$$\left| \left(\int_K \sqrt{D(t)} \cdot F \sqrt{D(t)} \cdot \mathfrak{G}(dt) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \sum_{\varphi=1}^{p} \sqrt{D(t_\varphi)} \cdot F \cdot \sqrt{D(t_\varphi)} \cdot \mathfrak{G}(B_\varphi \cdot K) \right)_{ik} \right| < \frac{\mathfrak{G}(K) \cdot \varepsilon}{\mathfrak{G}((a,b])}$$

mit beliebigen $t_\varphi \in B_\varphi \cdot K$ für $i, k = 1, \ldots, n$ gilt. Zu diesen Mengen $B_1, \ldots, B_p$ und der Folge $K_1, K_2, \ldots$ gibt es Mengen $J_1^m, \ldots, J_p^m$, die Vereinigungsmengen gewisser der zu Z^m gehörenden I_ς^m sind und die in Satz (3.3) angegebenen Relationen erfüllen.

3. Wir erhalten folgende Abschätzungen:

a. $$\left| \left(\int_{B_\varphi \cdot \overline{J_\varphi^m}} \sqrt{D(t)} \cdot F \sqrt{D(t)} \cdot \mathfrak{G}(dt) \right)_{ik} \right| \leq n^3 \cdot \mathfrak{G}(B_\varphi \cdot \overline{J_\varphi^m}) \quad ;$$

b. $$\left| \left(\int_{B_\varphi \cdot J_\varphi^m} \sqrt{D(t)} \cdot F \cdot \sqrt{D(t)} \cdot \mathfrak{G}(dt) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \sum_{\varsigma \text{ mit } I_\varsigma^m \subset J_\varphi^m} \sqrt{D(\tilde{v}_\varsigma^m)} \cdot F \cdot \sqrt{D(\tilde{v}_\varsigma^m)} \cdot \mathfrak{G}(I_\varsigma^m) \right)_{ik} \right| <$$

$$< n^3 \cdot \mathfrak{G}(\overline{B_\varphi} \cdot J_\varphi^m) + \frac{\varepsilon}{\mathfrak{G}((a,b])} \cdot \mathfrak{G}(B_\varphi \cdot J_\varphi^m) \quad ,$$

wobei $\tilde{v}_\varsigma^m \in I_\varsigma^m \cdot K_m \cdot B_\varphi$ gewählt sei;

c. $$\left| \left(\sqrt{D(\tilde{v}_\varsigma^m)} \cdot F \cdot \sqrt{D(\tilde{v}_\varsigma^m)} \cdot \mathfrak{G}(I_\varsigma^m) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \sqrt{C(t_\varsigma^m) - C(t_{\varsigma-1}^m)} \cdot F \cdot \sqrt{C(t_\varsigma^m) - C(t_{\varsigma-1}^m)} \right)_{ik} \right| <$$

$$< \frac{2 \cdot \varepsilon}{\mathfrak{G}((a,b])} \cdot \mathfrak{G}(I_\varsigma^m)$$

für alle ς mit $I_\varsigma^m \subset J_1^m + \ldots + J_p^m$, da wegen

$$\left| \left(C(t_\varsigma^m) - C(t_{\varsigma-1}^m) - D(\tilde{v}_\varsigma^m) \cdot \mathfrak{G}(I_\varsigma^m) \right)_{ik} \right| \leq \eta \cdot \mathfrak{G}(I_\varsigma^m)$$

die Ungleichung

$$\left| \left(\sqrt{C(t_\varsigma^m) - C(t_{\varsigma-1}^m)} - \sqrt{D(\tilde{v}_\varsigma^m) \cdot \mathfrak{G}(I_\varsigma^m)} \right)_{ik} \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{\mathfrak{G}((a,b]) \cdot n^3} \cdot \sqrt{\mathfrak{G}(I_\varsigma^m)}$$

gilt;

d. $\left|\left(\sum_{\varrho \text{ mit } I_\varrho^m \notin \bigcup_{\varphi=1}^{p} J_\varphi^m} \sqrt{C(t_\varrho^m) - C(t_{\varrho-1}^m)} \cdot F \cdot \sqrt{C(t_\varrho^m) - C(t_{\varrho-1}^m)} \right)_{ik}\right| \leq$

$$\leq n^3 \cdot \sigma\Big((a,b] - \sum_{\varphi=1}^{p} J_\varphi^m\Big) \quad .$$

Aus den Ungleichungen a. - d. folgt

$$\left|\left(\int_a^b \sqrt{D(t)} \cdot F \cdot \sqrt{D(t)} \cdot s(dt) \; - \; S_2(Z^m)\right)_{ik}\right| <$$

$$< 3 \cdot \varepsilon + n^3 \cdot \sigma\Big((a,b] - \sum_{\varphi=1}^{p} J_\varphi^m\Big) + n^3 \cdot \sum_{\varphi=1}^{p} \sigma(B_\varphi \dotplus J_\varphi^m) \quad ,$$

was nach Satz (3.3) für genügend große m kleiner als $4 \cdot \varepsilon$ ist; w.z.b.w. .

Wir untersuchen nun den Fall, daß C(t) auch rechtsseitige und beidseitige Unstetigkeitsstellen hat.
Zunächst geben wir hierzu ein Beispiel an. Es sei

$$C(t) := \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{für } 0 \leq t < \frac{1}{2} \quad , \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{für } t = \frac{1}{2} \quad , \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{für } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

und

$$F(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1 \quad .$$

Mit Z^m: $0 < \frac{1}{m} < \frac{2}{m} < \ldots < \frac{m-1}{m} < 1$, $v_\varrho^m := \frac{\varrho}{m}$

erhalten wir $S_2(Z^{2q+1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und

$S_2(Z^{2q}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\int_0^1 \sqrt{C(dt)} \cdot F(t) \cdot \sqrt{C(dt)}$ existiert also nicht; der Grund hierfür ist, daß

$$\sqrt{C(t) - C(t-0)} \cdot F(t) \cdot \sqrt{C(t) - C(t-0)}$$

$$+ \sqrt{C(t+0) - C(t)} \cdot F(t) \cdot \sqrt{C(t+0) - C(t)}$$

$$\neq \sqrt{C(t+0) - C(t-0)} \cdot F(t) \cdot \sqrt{C(t+0) - C(t-0)}$$

für den beidseitigen Unstetigkeitspunkt $t = \frac{1}{2}$ gilt.

Es kommt also wesentlich auf die beidseitigen Unstetigkeitspunkte von C(t) an.

Wir führen nun eine Abkürzung ein.

(4.7) Definition:
Es seien Z^1, Z^2, ... Unterteilungen von (a,b] und t ein Punkt aus (a,b) . Ist t Teilungspunkt von Z^m für jedes $m \geq m(t)$, so wollen wir sagen, daß t Teilungspunkt für schließlich alle Z^m ist.
Entsprechend ist der Ausdruck "Teilungspunkt für schließlich kein Z^m " zu verstehen.

Als Verallgemeinerung von Satz (4.6) beweisen wir

(4.8) Satz:
Es seien F(t) über [a,b] stetig und C(t) über [a,b] monoton nicht fallend. Z^1, Z^2, ... sei eine Folge von Unterteilungen von (a,b] mit $\lim_{m\to\infty} l(Z^m) = 0$
und mit der Eigenschaft, daß jeder beidseitige Unstetigkeitspunkt t_o von C(t) mit

$$\sqrt{C(t_o) - C(t_o-0)}\cdot F(t_o)\cdot\sqrt{C(t_o) - C(t_o-0)}$$
$$+ \sqrt{C(t_o+0) - C(t_o)}\cdot F(t_o)\cdot\sqrt{C(t_o+0) - C(t_o)}$$
$$\neq \sqrt{C(t_o+0) - C(t_o-0)}\cdot F(t_o)\cdot\sqrt{C(t_o+0) - C(t_o-0)}$$

entweder Teilungspunkt für schließlich alle Z^m oder Teilungspunkt für schließlich kein Z^m ist. Unter diesen Voraussetzungen existiert $\lim_{m\to\infty} S_2(Z^m)$. Definieren wir

$$C_2(t) := \begin{cases} C(t+0) & \text{für die beidseitigen Unstetigkeitspunkte t von C(t), die Teilungspunkte für schließlich kein } Z^m \text{ sind,} \\ C(t) & \text{für die übrigen Punkte t} \end{cases}$$

und

$$s_2(t) := \operatorname{sp}\{C_2(t)\} \quad ,$$

und ist $D_2(t)$ die zur Integraldarstellung der monoton nicht fallenden Matrixfunktion $C_2(t)$ gehörende positiv

semidefinite Matrixfunktion, so gilt

$$\lim_{m\to\infty} S_2(Z^m) = \int_a^b \sqrt{D_2(t)}\cdot F(t)\cdot\sqrt{D_2(t)}\cdot s_2(dt) \quad .$$

Beweis:

1. Wir dürfen wieder $F(t) \equiv F$ mit $|(F)_{ik}| \le 1$ annehmen. Hat $C(t)$ in $[a,b)$ abzählbar unendlich viele Werte τ mit $C(\tau) \neq C(\tau+0)$, und führen wir wie in Definition (3.4) die Funktion $\delta_R(t)$ und die Menge S^R ein, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Werte $\tau_1, \dots, \tau_w \in S^R$, so daß für $S_1 := S^R - \{\tau_1, \dots, \tau_w\}$ die Beziehung $\sum_{t\in S_1} \delta_R(t) \le \frac{\varepsilon^2}{s(b) - s(a)}$ gilt.

Setzen wir $\Delta_R(t) := C(t+0) - C(t)$, so ist

$$C_3(t) := C(t) - \sum_{\tau\in S_1\cdot[a,t)} \Delta_R(\tau)$$ eine über $[a,b]$ monoton nicht fallende Matrixfunktion mit höchstens endlich vielen rechtsseitigen und damit auch endlich vielen beidseitigen Unstetigkeitsstellen. Für $a \le t_1 < t_2 \le b$ ergeben die Sätze (2.1) und (2.5)

$$\Big|\Big(\sqrt{C(t_2) - C(t_1)}\cdot F\cdot\sqrt{C(t_2) - C(t_1)} - \sqrt{C_3(t_2) - C_3(t_1)}\cdot F\cdot\sqrt{C_3(t_2) - C_3(t_1)}\Big)_{ik}\Big| \le$$

$$\le 2\cdot n^3\cdot\sqrt{s(t_2) - s(t_1)}\cdot\sqrt{\sum_{\tau\in S_1\cdot[t_1,t_2)} \delta_R(\tau)}$$

$$\le n^3\cdot\left\{\frac{s(t_2) - s(t_1)}{s(b) - s(a)}\cdot\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\cdot(s(b) - s(a))\cdot\sum_{\tau\in S_1\cdot[t_1,t_2)} \delta_R(\tau)\right\} \quad .$$

Wir bezeichnen mit $S_2^{(1)}(Z)$ die Riemann-Stieltjes-Summe, die aus $S_2(Z)$ entsteht, wenn wir $C(t)$ durch $C_3(t)$ ersetzen. Aus der letzten Ungleichung folgt dann $|(S_2(Z) - S_2^{(1)}(Z))_{ik}| \le 2\cdot n^3\cdot\varepsilon$. Ferner unterscheiden sich die Elemente des mit $C(t)$ gebildeten Integrals

$$\int_a^b \sqrt{D_2(t)}\cdot F\cdot\sqrt{D_2(t)}\cdot s(dt)$$

von den Elementen des entsprechend mit $C_3(t)$ gebildeten Integrals um höchstens

$$n^3 \cdot \varepsilon^2 \cdot (s(b) - s(a))^{-1} .$$

2. Wegen Beweisteil 1 können wir nun voraussetzen, daß für höchstens endlich viele Werte $\tau \in [a,b)$ $C(\tau) \neq C(\tau+0)$ gilt. Nach Satz (4.5) brauchen wir daher Satz (4.8) nur noch unter der zusätzlichen Voraussetzung beweisen, daß $C(\tau) \neq C(\tau+0)$ in $[a,b)$ für genau einen Punkt τ gilt. Ist dieser Punkt τ entweder gleich a oder ein Teilungspunkt für schließlich alle Z^m, so folgt wegen

$$\sqrt{C(\tau+\eta) - C(\tau)} \cdot F \cdot \sqrt{C(\tau+\eta) - C(\tau)} \longrightarrow$$

$$\sqrt{D(\tau)} \cdot F \cdot \sqrt{D(\tau)} \cdot (s(\tau+0) - s(\tau)) \quad \text{für } \eta \searrow 0$$

mittels Satz (4.6) die Behauptung.
Ist τ Teilungspunkt für schließlich kein Z^m, so ist Satz (4.8) eine triviale Folgerung von Satz (4.6).
Es sei nun τ ein Punkt, der weder Teilungspunkt für schließlich alle Z^m noch Teilungspunkt für schließlich kein Z^m ist. Wir zerlegen dann die Folge Z^1, Z^2, ... in eine Teilfolge Z^{m_ν}, für die τ Teilungspunkt für schließlich alle Z^{m_ν} ist, und in eine Teilfolge $Z^{m'_\nu}$, für die τ Teilungspunkt für schließlich kein $Z^{m'_\nu}$ ist. Wegen der Voraussetzungen des Satzes ist

$$\sqrt{C(\tau) - C(\tau-0)} \cdot F \cdot \sqrt{C(\tau) - C(\tau-0)}$$

$$+ \sqrt{C(\tau+0) - C(\tau)} \cdot F \cdot \sqrt{C(\tau+0) - C(\tau)}$$

$$= \sqrt{C(\tau+0) - C(\tau-0)} \cdot F \cdot \sqrt{C(\tau+0) - C(\tau-0)} .$$

Es konvergieren daher $S_2(Z^{m_\nu})$ und $S_2(Z^{m'_\nu})$ gegen den gleichen Grenzwert.
Damit ist Satz (4.8) allgemein bewiesen.

Für stetige F(t), G(t) und H(t) ließen sich diese Existenzbeweise für $\lim_{m\to\infty} S_2(Z^m)$ unschwer zu Existenzbeweisen für den Grenzwert von

$$\sum_{\varrho=1}^{r(m)} G(v_\varrho^m) \cdot \sqrt{C(t_\varrho^m) - C(t_{\varrho-1}^m)} \cdot F(v_\varrho^m) \cdot \sqrt{C(t_\varrho^m) - C(t_{\varrho-1}^m)} \cdot H(v_\varrho^m)$$

und damit wieder zu einem Existenzbeweis für $\lim_{l(Z)\to 0} S_1(Z)$

erweitern. Jedoch wurde auf diese einfache Erweiterung verzichtet, um die Darstellung nicht zu unübersichtlich zu machen.

Nun behandeln wir noch einige Sätze, die das Integral $\int_a^b f(t) \cdot l_i(C(dt))$ betreffen.

Einen von Bellman in (2) für einen Spezialfall durchgeführten Beweis können wir fast wörtlich als Beweis für folgende Aussage übernehmen:

Es seien $C(t)$ eine über $[a,b]$ monoton nicht fallende Matrixfunktion, $f(t)$ eine über $[a,b]$ stetige Funktion und $Z^1, Z^2, \ldots$ eine Folge von Unterteilungen von $(a,b]$ mit $\lim_{m\to\infty} l(Z^m) = 0$ und mit der Eigenschaft, daß jeder Teilungspunkt von Z^m auch Teilungspunkt von Z^{m+1} ist. Unter diesen Voraussetzungen existiert für $i = 1, \ldots, n$ stets $\lim_{m\to\infty} S_{3,i}(Z^m)$.

Die Voraussetzungen über die Unterteilungsfolge $Z^1, Z^2, \ldots$ lassen sich jedoch abschwächen.

(4.9) Satz:

Es seien über $[a,b]$ $C(t)$ eine monoton nicht fallende Matrixfunktion und $f(t)$ eine stetige Funktion. $Z^1, Z^2, \ldots$ sei eine Folge von Unterteilungen von $(a,b]$ mit $l(Z^m) \to 0$ für $m \to \infty$ und mit der Eigenschaft, daß jeder beidseitige Unstetigkeitspunkt von $s(t)$ entweder Teilungspunkt für schließlich alle Z^m oder Teilungspunkt für schließlich kein Z^m ist. Unter diesen Voraussetzungen existiert für $i = 1, \ldots, n$

$$\lim_{m\to\infty} S_{3,i}(Z^m) \quad .$$

Den Beweis für diesen Satz skizzieren wir teilweise nur, da sich einige seiner Gedankengänge eng an frühere Beweise anschließen.

Beweis:

1. Mittels der für positiv semidefinite Matrizen D geltenden Ungleichung $0 \leq l_i(D) \leq sp\{D\}$ zeigt man, daß

der dem Satz (4.5) entsprechende Satz auch für $\lim_{m\to\infty} s_{3,i}(Z^m)$ gilt. Wegen der Stetigkeit von $f(t)$ können wir deshalb $f(t) \equiv 1$ für $a \le t \le b$ voraussetzen.

2. Sind t_1, t_2, t_3 drei beliebige Werte mit $a \le t_1 < t_2 < t_3 \le b$, so ergibt die Anwendung der Ungleichung $0 \le \sum_{i=1}^{j} l_i(D) \le sp\{D\}$ und des Satzes (2.4)

$$\sum_{i=1}^{j} l_i(C(t_2) - C(t_1)) + \sum_{i=1}^{j} l_i(C(t_3) - C(t_2)) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{j} l_i(C(t_3) - C(t_1)) +$$

$$+ \min\{s(t_3) - s(t_2),\ s(t_2) - s(t_1)\}$$

$$\le \sum_{i=1}^{j} l_i(C(t_3) - C(t_1)) + (s(t_3) - s(t_2+0))$$

$$+ (s(t_2-0) - s(t_1))$$

$$+ \min\{s(t_2+0) - s(t_2),\ s(t_2) - s(t_2-0)\}\ .$$

3. Es sei Z eine Unterteilung von $(a,b]$ mit den Teilungspunkten $t_1, \dots, t_{r-1}$. Zu Z und zu jedem beliebig gewählten $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\eta > 0$ mit

$$\sum_{\rho=1}^{r-1} (s(t_\rho+\eta) - s(t_\rho+0) + s(t_\rho-0) - s(t_\rho-\eta)) < \varepsilon\ .$$

Z^0 sei hierzu eine beliebige Unterteilung von $(a,b]$ mit $l(Z^0) < \min\{\eta, l(Z)\}$. Mit $\tilde{Z}$ bezeichnen wir die Unterteilung von $(a,b]$, die als Teilungspunkte genau alle Teilungspunkte von Z und von Z^0 hat. Nach Satz (2.4) gilt

$$\sum_{i=1}^{j} s_{3,i}(Z) \le \sum_{i=1}^{j} s_{3,i}(\tilde{Z})\ ;$$

aus der in Beweisteil 2 abgeleiteten Ungleichung folgt

$$\sum_{i=1}^{j} s_{3,i}(\tilde{Z}) \le \sum_{i=1}^{j} s_{3,i}(Z^0) + \varepsilon + O(Z,Z^0)$$

mit $O(Z,Z^0) := \sum \min\{s(\tau+0) - s(\tau),\ s(\tau) - s(\tau-0)\}$,

wobei diese Summe zu erstrecken ist über alle beidseitigen Unstetigkeitspunkte τ von $s(t)$, die Teilungspunkte von Z, aber keine Teilungspunkte von Z^0 sind. Somit erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{j} S_{3,i}(Z) \leq \sum_{i=1}^{j} S_{3,i}(Z^0) + \varepsilon + O(Z,Z^0)$$

für $j = 1, \ldots, n$.

4. Zu jeder den Voraussetzungen von Satz (4.9) genügenden Folge $Z^1, Z^2, \ldots$ und zu jedem fest gewählten j gibt es zwei Teilfolgen $Z^{m_1}, Z^{m_2}, \ldots$ und $Z^{m'_1}, Z^{m'_2}, \ldots$, für die

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{i=1}^{j} S_{3,i}(Z^{m_\nu}) \quad \text{und} \quad \lim_{\nu\to\infty} \sum_{i=1}^{j} S_{3,i}(Z^{m'_\nu})$$

existieren und den Gleichungen

$$\liminf_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{j} S_{3,i}(Z^m) = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{i=1}^{j} S_{3,i}(Z^{m_\nu})$$

und

$$\limsup_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{j} S_{3,i}(Z^m) = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{i=1}^{j} S_{3,i}(Z^{m'_\nu})$$

genügen.

Jeder beidseitige Unstetigkeitspunkt von $s(t)$, der Teilungspunkt für schließlich alle $Z^{m'_\nu}$ ist, ist auch Teilungspunkt für schließlich alle Z^{m_ν}. Wir folgern darum aus der in Teil 3 bewiesenen Abschätzung die Ungleichung

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{i=1}^{j} S_{3,i}(Z^{m'_\nu}) \leq \lim_{\nu\to\infty} \sum_{i=1}^{j} S_{3,i}(Z^{m_\nu}) .$$

Also existiert $\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{j} S_{3,i}(Z^m)$ und, da dieser Beweis für $j = 1, \ldots, n$ durchzuführen ist, auch $\lim_{m\to\infty} S_{3,i}(Z^m)$ für $i = 1, \ldots, n$.

Nach Satz (4.9) ist $\lim_{m\to\infty} S_{3,i}(Z^m)$, sofern dieser Grenzwert überhaupt existiert, außer von $f(t)$, $C(t)$ und i nur von der Menge der beidseitigen Unstetigkeitspunkte von $s(t)$, die Teilungspunkte für schließlich alle Z^m sind, abhängig. Wir können darüber folgenden Satz aussprechen.

(4.10) Satz:

C(t), f(t) und die beiden Unterteilungsfolgen $Z^1, Z^2, \ldots$ und $\tilde{Z}^1, \tilde{Z}^2, \ldots$ mögen über $[a,b]$ den Voraussetzungen von Satz (4.9) genügen; ferner sei jeder beidseitige Unstetigkeitspunkt von s(t), der ein Teilungspunkt für schließlich alle Z^m ist, auch ein Teilungspunkt für schließlich alle $\tilde{Z}^m$. Ist $f(t) \geqslant 0$ für $a \leqslant t \leqslant b$, so gilt dann für $j = 1, \ldots, n$

$$\sum_{i=1}^{j} \lim_{m\to\infty} S_{\mathfrak{Z},i}(Z^m) \leqslant \sum_{i=1}^{j} \lim_{m\to\infty} S_{\mathfrak{Z},i}(\tilde{Z}^m) \quad .$$

Die Behauptung dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus der in Teil 3 des Beweises von Satz (4.9) abgeleiteten Ungleichung.

Das vor Definition (4.7) angeführte Beispiel zeigt mit $f(t) \equiv 1$ in $[0,1]$, daß die Behauptung von Satz (4.9) ohne die Voraussetzung über die beidseitigen Unstetigkeitspunkte von s(t) nicht richtig ist; denn es ist in diesem Beispiel

$$S_{\mathfrak{Z},1}(Z^m) = \begin{cases} 1 & \text{für ungerades } m \ , \\ 2 & \text{für gerades } m \end{cases}$$

und

$$S_{\mathfrak{Z},2}(Z^m) = \begin{cases} 1 & \text{für ungerades } m \ , \\ 0 & \text{für gerades } m \ . \end{cases}$$

$\lim_{m\to\infty} S_{\mathfrak{Z},1}(Z^m)$ und $\lim_{m\to\infty} S_{\mathfrak{Z},2}(Z^m)$ existieren daher nicht.

Einfache Überlegungen zeigen, warum man die beidseitigen Unstetigkeitspunkte von s(t) besonders beachten muß. Ist nämlich Z eine Unterteilung mit hinreichend kleinem l(Z), und ist der beidseitige Unstetigkeitspunkt τ von s(t) Teilungspunkt von Z, so beträgt der Anteil von τ an $S_{\mathfrak{Z},i}(Z)$ ungefähr $f(\tau)\cdot l_i(C(\tau+0) - C(\tau)) + f(\tau)\cdot l_i(C(\tau) - C(\tau-0))$; ist jedoch τ kein Teilungspunkt von Z, so ist sein Anteil ungefähr gleich $f(\tau)\cdot l_i(C(\tau+0) - C(\tau-0))$. Im allgemeinen ist aber für den beidseitigen Unstetigkeitspunkt τ $l_i(C(\tau+0) - C(\tau)) + l_i(C(\tau) - C(\tau-0)) \neq l_i(C(\tau+0) - C(\tau-0))$. Wenn der beidseitige Unstetigkeitspunkt τ von s(t) Teilungspunkt für schließlich alle Z^m ist, wird daher der Wert

$(s(\tau+0) - s(\tau-0))\cdot f(\tau)$ anders auf die n Grenzwerte $\lim_{m\to\infty} S_{\mathfrak{Z},i}(Z^m)$ verteilt, als wenn τ Teilungspunkt für schließlich kein Z^m ist.

Im folgenden beschäftigen wir uns nur mehr mit dem Fall, daß jeder beidseitige Unstetigkeitspunkt von s(t) Teilungspunkt von schließlich allen Z^m einer vorgegebenen Folge Z^1, Z^2, ... ist.
Wir können uns auf diesen Spezialfall beschränken. Denn ist $\tilde{Z}^1$, $\tilde{Z}^2$, ... eine beliebige, den Voraussetzungen von Satz (4.9) genügende Unterteilungsfolge, so definieren wir wie in Satz (4.8)

$$C_2(t) := \begin{cases} C(t+0) & \text{für die beidseitigen Unstetigkeitspunkte} \\ & t \text{ von } C(t), \text{ die Teilungspunkte für} \\ & \text{schließlich kein } \tilde{Z}^m \text{ sind,} \\ C(t) & \text{für die übrigen Punkte } t\ . \end{cases}$$

Der Wert von $\lim_{m\to\infty} S_{\mathfrak{Z},i}(\tilde{Z}^m)$ ändert sich nicht, wenn wir die einzelnen $S_{\mathfrak{Z},i}(\tilde{Z}^m)$ mit der Matrixfunktion $C_2(t)$ statt mit C(t) bilden. Die nächsten Sätze lassen sich in diesem Sinne modifizieren.

Zunächst führen wir zur Abkürzung die folgenden Funktionen ein.

(4.11) Definition:
Ist C(t) eine über [a,b] monoton nicht fallende Matrixfunktion, ist Z^1, Z^2, ... eine beliebige Folge von Unterteilungen von (a,b] mit $l(Z^m)\to 0$ für $m\to\infty$, und ist jeder beidseitige Unstetigkeitspunkt von s(t) Teilungspunkt für schließlich alle Z^m, so definieren wir mit $f(t)\equiv 1$ für $t\in[a,b]$ die reellen Funktionen

$$L_i(t) := \lim_{m\to\infty} S_{\mathfrak{Z},i}(Z^m(a,t))$$

für $i = 1, \ldots, n$.

$L_1(t), \ldots, L_n(t)$ sind von der speziell gewählten Folge Z^1, Z^2, ... unabhängig, sofern nur jeder beidseitige Unstetigkeitspunkt von s(t) Teilungspunkt für schließlich alle Z^m ist.

Für beliebige t_1, t_2 mit $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ gilt

$$L_i(t_2) - L_i(t_1) = \lim_{m\to\infty} S_{\zeta,i}(Z^m(t_1,t_2))$$

und

$$0 \leq L_i(t_2) - L_i(t_1) \leq s(t_2) - s(t_1)$$

für $i = 1, \ldots, n$.

Wie in den Beweisen zu den Sätzen (4.1) und (4.2) folgern wir aus der letzten Ungleichung, daß über $[a,b]$ $s(t)$-integrable Funktionen $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ mit

$$L_i(t) = \int_a^t g_i(\tau)\cdot s(d\tau)$$

für $a \leq t \leq b$ existieren. Bezeichnen wir wieder mit σ_0 das vom Stetigkeitsanteil von $s(t)$ über $\mathfrak{L}(a,b)$ erklärte Maß, so gelten für alle einseitigen Unstetigkeitspunkte und für σ_0-fast alle Stetigkeitspunkte von $s(t)$ die Beziehungen

$$\sum_{i=1}^n g_i(t) = 1 \quad \text{und} \quad g_1(t) \geq g_2(t) \geq \ldots \geq g_n(t) \geq 0 \ ,$$

für alle beidseitigen Unstetigkeitspunkte die Beziehungen

$$\sum_{i=1}^n g_i^L(t) = 1 \quad \text{und} \quad g_1^L(t) \geq g_2^L(t) \geq \ldots \geq g_n^L(t) \geq 0 \ ,$$

$$\sum_{i=1}^n g_i^R(t) = 1 \quad \text{und} \quad g_1^R(t) \geq g_2^R(t) \geq \ldots \geq g_n^R(t) \geq 0 \ .$$

Für die Funktionen $g_i(t)$ geben wir zunächst einen einfachen Satz an.

(4.12) Satz:

Erfüllen $C(t)$, $f(t)$ und Z^1, Z^2, ... über $[a,b]$ die Voraussetzungen von Satz (4.9), ist jeder beidseitige Unstetigkeitspunkt von $s(t)$ ein Teilungspunkt für schließlich alle Z^m, und gilt $L_i(t) = \int_a^t g_i(\tau)\cdot s(d\tau)$ für die über $[a,b]$ $s(t)$-integrablen Funktionen $g_1(t), \ldots, g_n(t)$, so ist für $i = 1, \ldots, n$

$$\lim_{m\to\infty} S_{\zeta,i}(Z^m) = \int_a^b f(t)\cdot g_i(t)\cdot s(dt) \ .$$

Den Beweis für diesen Satz brauchen wir nicht durchzuführen, da er wie der Beweis für die zweite Behauptung von Satz (4.4) verläuft.

Der nächste Satz zeigt, wie man die Funktionen $g_i(t)$ noch auf einem anderen Weg erhält.

(4.13) Satz:

$C(t)$ sei über $[a,b]$ monoton nicht fallend. $l_1(t), \dots, l_n(t)$ seien die Eigenwerte der zu der Integraldarstellung $C(t) = C(a) + \int_a^t D(\tau)\cdot s(d\tau)$ gehörenden positiv semidefiniten Matrixfunktion $D(t)$; $g_1(t), \dots, g_n(t)$ seien $s(t)$-integrable Funktionen mit $L_i(t) = \int_a^t g_i(\tau)\cdot s(d\tau)$ für $a \leq t \leq b$. Es gelten dann für alle einseitigen Unstetigkeitspunkte und für σ_o-fast alle Stetigkeitspunkte von $s(t)$ die Gleichungen $g_i(t) = l_i(t)$, für alle beidseitigen Unstetigkeitspunkte die Gleichungen $g_i^L(t) = l_i^L(t)$, $g_i^R(t) = l_i^R(t)$ für $i = 1, \dots, n$.

Beweis:

1. Die Funktionen $l_1(t), \dots, l_n(t)$ sind nach Satz (2.8) als Eigenwerte der $s(t)$-meßbaren, positiv semidefiniten Matrixfunktion $D(t)$ ebenfalls $s(t)$-meßbar.

2. Zur Vereinfachung definieren wir $h_j(t) := \sum_{i=1}^{j} g_i(t)$ und $m_j(t) := \sum_{i=1}^{j} l_i(t)$ für $j = 1, \dots, n$.

   Für beliebige t_1, t_2 mit $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ ergibt die Anwendung von Satz (2.4)

   $$(*) \quad \sum_{i=1}^{j} l_i(C(t_2) - C(t_1)) \leq \sum_{i=1}^{j} (L_i(t_2) - L_i(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} h_j(\tau)\cdot s(d\tau) \quad .$$

   Andererseits ist bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ für eine geeignete Zerlegung $t_1 = \hat{t}_o < \hat{t}_1 < \hat{t}_2 < \dots < \hat{t}_r = t_2$ von $(t_1, t_2]$

   $$\sum_{i=1}^{j} (L_i(t_2) - L_i(t_1)) - \varepsilon \leq$$

$$\leq \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{i=1}^{j} l_i(C(\hat{t}_\rho) - C(\hat{t}_{\rho-1}))$$

$$= \sum_{\rho=1}^{r} \sup \left\{ \int_{\hat{t}_{\rho-1}}^{\hat{t}_\rho} \sum_{i=1}^{j} \gamma_{i,\rho}^* \cdot D(\tau) \cdot \gamma_{i,\rho} \cdot s(d\tau) \; ; \; \gamma_{i,\rho} \text{ orthonormal} \right\}$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_2} \sup \left\{ \sum_{i=1}^{j} \gamma_i^*(\tau) \cdot D(\tau) \cdot \gamma_i(\tau) \; ; \; \gamma_i(\tau) \text{ orthonormal} \right\} \cdot s(d\tau)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} m_j(\tau) \cdot s(d\tau) \quad ;$$

also:

$$(**) \qquad \int_{t_1}^{t_2} h_j(\tau) \cdot s(d\tau) \leq \int_{t_1}^{t_2} m_j(\tau) \cdot s(d\tau) \quad .$$

3. Mit den in Definition (3.4) eingeführten Mengen S^L, S^R, S gilt nach Satz (3.9)

$$l_i(t) = l_i\left(\lim_{\tau \to t} \frac{C(\tau) - C(t)}{s(\tau) - s(t)} \right) \qquad \text{für } \sigma_0\text{-fast alle } t \in [a,b] - S \, ,$$

$$l_{i,L}(t) = l_i\left(\lim_{\tau \nearrow t} \frac{C(\tau) - C(t)}{s(\tau) - s(t)} \right) \qquad \text{für alle } t \in S^L$$

und

$$l_{i,R}(t) = l_i\left(\lim_{\tau \searrow t} \frac{C(\tau) - C(t)}{s(\tau) - s(t)} \right) \qquad \text{für alle } t \in S^R \, .$$

Da die Eigenwerte $l_i(D)$ stetige Funktionen der Elemente der positiv semidefiniten Matrix D sind, kann man die Reihenfolge von Eigenwertbildung und Limesbildung bei diesen Gleichungen vertauschen:

$$l_i(t) = \lim_{\tau \to t} l_i\left(\frac{C(\tau) - C(t)}{s(\tau) - s(t)} \right) \qquad \text{für } \sigma_0\text{-fast alle } t \in [a,b] - S$$

und entsprechend für alle $t \in S^L$ und für alle $t \in S^R$.
Aus den in Beweisteil 2 abgeleiteten Ungleichungen (*) und (**) erhalten wir daher für $j = 1, \ldots, n$
$m_j(t) \leq h_j(t) \leq m_j(t)$ für alle einseitigen Unstetigkeitspunkte und für σ_0-fast alle Stetigkeitspunkte von s(t), sowie
$m_j^L(t) \leq h_j^L(t) \leq m_j^L(t)$, $m_j^R(t) \leq h_j^R(t) \leq m_j^R(t)$

für alle beidseitigen Unstetigkeitspunkte.
Daraus ergibt sich die Behauptung von Satz (4.13) .

Aus den Sätzen (4.12) und (4.13) folgt schließlich, daß wir, wie bei der Berechnung der Werte von $\int_a^b F(t)\cdot C(dt)\cdot G(t)$ und von $\lim_{m\to\infty} S_2(Z^m)$, auch bei der Berechnung von $\lim_{m\to\infty} S_{3,i}(Z^m)$ von der zur Integraldarstellung von C(t) gehörenden positiv semidefiniten Matrixfunktion D(t) ausgehen können.

§ 5. Verallgemeinerung auf kompakte Hausdorff-Räume.

Es sei X ein kompakter Hausdorff-Raum mit den Elementen x . $\mathfrak{O}$ sei die Gesamtheit der offenen Teilmengen G von X und $\mathfrak{K}$ der kleinste $\mathfrak{S}$-Körper über X mit

$$\mathfrak{K} \supset \left\{ M : M \subset X \;\&\; M \text{ kompakt} \;\&\; M = \prod_{j \geq 1} G_j \text{ mit } G_j \in \mathfrak{O} \right\}.$$

Jedes über $\mathfrak{K}$ definierte, endliche Maß σ ist regulär, d. h. es gilt $\sigma(K) = \inf\left\{\sigma(G) : G \supset K \;\&\; G \in \mathfrak{O}\cdot\mathfrak{K}\right\}$ für jedes $K \in \mathfrak{K}$. Ist G eine beliebige offene Teilmenge von X , und ist x ein Element von G , so gibt es eine offene Menge $G_o \in \mathfrak{O}\cdot\mathfrak{K}$ mit $x \in G_o$ und mit $G_o \subset G$. Man kann sich daher, sofern man etwa zur Untersuchung von Stetigkeitseigenschaften offene Mengen benötigt, auf offene Mengen aus $\mathfrak{K}$ beschränken [++]. Im Fall $X = R^p$ ist, wenn wir die übliche Topologie zugrunde legen, $\mathfrak{K}$ gleich dem $\mathfrak{S}$-Körper der Borel'schen Mengen des R^p.

Wir müssen nun einige der bisher benutzten Bezeichnungen und Begriffe übertragen. Es ist klar, daß wir an Stelle der über $[a,b]$ stetigen Funktion f(t) und an Stelle der über dem gleichen Bereich stetigen Matrixfunktionen F(t), G(t) jetzt eine für jedes $x \in X$ erklärte, stetige Funktion f(x) und zwei ebenfalls über X stetige Matrixfunktionen F(x), G(x) betrachten. Die monoton nicht fallende Matrixfunktion C(t), bezüglich der wir integrieren, ersetzen wir durch eine für jedes $K \in \mathfrak{K}$ erklärte, positiv semidefinite, über $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{S}$-additive Matrixfunktion C(K) . Es ist dann $\sigma(K) := \mathrm{sp}\{C(K)\}$ ein über $\mathfrak{K}$ definiertes endliches Maß. Nach Satz (2.1) gilt wieder $|c_{ik}(K)| \leq \sigma(K)$. Wegen dieser Ungleichung gibt es nach dem Satz von Radon-Nikodym eine komplexwertige, positiv semidefinite, $\mathfrak{K}$-meßbare Matrixfunktion D(x) mit $C(K) = \int_K D(x)\cdot\sigma(dx)$ für jedes $K \in \mathfrak{K}$ und mit $\mathrm{sp}\{D(x)\} = 1$. D(x) ist bis auf eine σ-Nullmenge eindeutig bestimmt.

[+] Die drei in diesem Paragraphen behandelten Probleme kann man unter den in (4) §5,9 angegebenen Gesichtspunkten zusammenfassen und nach den dort beschriebenen Methoden gemeinsam behandeln. Es ergeben sich auf diesem Weg Existenzbeweise für die entsprechenden Lebesgue-Stieltjes-Integrale; für die in §4 untersuchten Riemann-Stieltjes-Integrale sind zusätzliche Betrachtungen nötig.

[++] Man vergleiche hierzu (6) Kapitel X, speziell §51 und §52. - $\mathfrak{K}$ ist der $\mathfrak{S}$-Körper der Baire'schen Mengen.

Da in $\mathfrak{K}$ keine Mengen als "Intervalle" gekennzeichnet sind, ersetzen wir den Begriff der Intervallunterteilung durch den Begriff der $\mathfrak{K}$-Unterteilung. Wir verstehen unter einer $\mathfrak{K}$-Unterteilung Z von X endlich viele, paarweise fremde Mengen $I_1, \dots, I_r$ aus $\mathfrak{K}$ und endlich viele Punkte $v_1, \dots, v_r$ mit $I_1 + \dots + I_r = X$ und mit $v_1 \in I_1, \dots, v_r \in I_r$. Den Begriff der Feinheit einer Intervallunterteilung können wir ebenfalls nicht übertragen. Statt dessen definieren wir mit dem Maß $\sigma(K) = sp\{C(K)\}$ für jedes $K \in \mathfrak{K}$ die Approximationsgüte von Z bezüglich K durch

$$d(K;Z) := \min\left\{\sigma\Big(K \div \sum_{\nu \le \nu_0} I_{\rho_\nu}\Big) : \rho_\nu \in \{1,\dots,r\},\ 0 \le \nu_0 \le r\right\}.$$

Für die folgenden Sätze genügt die Voraussetzung, daß für jede der zugelassenen Folgen von $\mathfrak{K}$-Unterteilungen $Z^1, Z^2, \dots$ $\lim_{m\to\infty} d(K;Z^m) = 0$ für jedes $K \in \mathfrak{K}$ gilt. Wegen der Regularität von σ über $\mathfrak{K}$ ist diese Voraussetzung gleichbedeutend mit der Bedingung $\lim_{m\to\infty} d(G_0;Z^m) = 0$ für jedes $G_0 \in \mathfrak{O} \cdot \mathfrak{K}$.

Wir benützen ferner die entsprechend übertragene Bezeichnung $A(g,\varepsilon,Z)$ und führen wieder

$$S_1(Z) := \sum_{\rho=1}^{r} F(v_\rho)\cdot C(I_\rho)\cdot G(v_\rho)$$

und analog $S_2(Z)$ und $S_{3,i}(Z)$ ein.

Wir geben nun die Verallgemeinerungen einiger Sätze aus § 3 an, die man für den Beweis des später folgenden Existenzsatzes benötigt.

(5.1) Hilfssatz:
Ist $\sigma/\mathfrak{K}$ ein endliches Maß, ist $g(x)$ σ-integrabel über X und sind $Z^1, Z^2, \dots$ $\mathfrak{K}$-Unterteilungen von X mit $\lim_{m\to\infty} d(G_0;Z^m) = 0$ für jedes $G_0 \in \mathfrak{O} \cdot \mathfrak{K}$, so gilt für jedes $\varepsilon > 0$ $\lim_{m\to\infty} \sigma(A(g,\varepsilon,Z^m)) = 0$.

(5.2) Hilfssatz:
Genügen σ und $Z^1, Z^2, \dots$ den Voraussetzungen von Hilfssatz (5.1), sind $K_1, K_2, \dots$ $\mathfrak{K}$-meßbare Mengen mit $\lim_{m\to\infty} \sigma(\overline{K}_m) = 0$ und $B_1, \dots, B_p$ endlich viele,

paarweise fremde, $\mathfrak{K}$-meßbare Mengen mit $X = B_1 + \ldots + B_p$, so gibt es Mengen $J_1^m, \ldots, J_p^m$, die Vereinigungsmengen gewisser I_ϱ^m sind, und für die gilt:

a. $J_\varphi^m \cdot J_{\varphi'}^m = \emptyset$ für $\varphi \neq \varphi'$;

b. $I_\varrho^m \cdot B_\varphi \cdot K_m \neq \emptyset$ für jedes I_ϱ^m mit $I_\varrho^m \subset J_\varphi^m$;

c. $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{\varphi=1}^{p} \mathfrak{G}(B_\varphi \dot{+} J_\varphi^m) = 0$;

d. $\lim\limits_{m\to\infty} \mathfrak{G}(X - \sum\limits_{\varphi=1}^{p} J_\varphi^m) = 0$.

Der Beweis verläuft analog dem der Sätze (3.2) und (3.3). Wir benötigen noch einen weiteren Hilfssatz.

(5.3) Hilfssatz:

Es sei $g(x)$ $\mathfrak{G}$-integrabel über X mit $\Gamma(K) := \int_K g(x)\cdot\mathfrak{G}(dx)$. Sind Z^1, Z^2, ... $\mathfrak{K}$-Unterteilungen von X mit $\lim\limits_{m\to\infty} d(G_0;Z^m) = 0$ für jedes $G_0 \in \mathfrak{O}\mathfrak{K}$ und mit der Eigenschaft, daß jedes I_ϱ^{m+1} Teilmenge eines I_ϱ^m ist, und definieren wir

$$g_m(x) := \begin{cases} \dfrac{\Gamma(I_\varrho^m)}{\mathfrak{G}(I_\varrho^m)} & \text{für } x \in I_\varrho^m \text{ mit } \mathfrak{G}(I_\varrho^m) > 0 \ , \\ 0 & \text{für } x \in I_\varrho^m \text{ mit } \mathfrak{G}(I_\varrho^m) = 0 \ , \end{cases}$$

so konvergiert die Folge $g_1(x)$, $g_2(x)$, ... $\mathfrak{G}$-fast überall gegen $g(x)$.

Beweis:

Für $B(g,\varepsilon,m) := \sum\limits_{\mu\geq m} A(g,\varepsilon,Z^\mu)$ kann man wie im Beweis von Satz (3.2) die Beziehung $\lim\limits_{m\to\infty} \mathfrak{G}\big(B(g,\varepsilon,m)\big) = 0$ zeigen. Die Tatsache, daß jedes I_ϱ^{m+1} Teilmenge eines I_ϱ^m ist, braucht man dabei nur beim Nachweis der Eigenschaft 2.d. und deshalb in Beweisteil 4 . Wegen $\{x : |g(x) - g_\mu(x)| > \varepsilon\} \subset A(g,\varepsilon,Z^\mu) + \sum\limits_{\varrho \text{ mit } \mathfrak{G}(I_\varrho^\mu)=0} I_\varrho^\mu$ erhalten wir

$$\lim_{m\to\infty} \mathfrak{G}\Big(\sum_{\mu\geq m} \{x : |g(x) - g_\mu(x)| > \varepsilon\}\Big) = 0 \ ,$$

w. z. b. w. .

In dem folgenden Existenzsatz fassen wir die drei von uns behandelten Probleme zusammen.

(5.4) Satz:

Es seien $F(x)$, $G(x)$ und $f(x)$ über X stetig. $C(K)$ sei über $\mathfrak{K}$ σ-additiv und positiv semidefinit mit der Spur $\sigma(K)$ und mit der Integraldarstellung $C(K) = \int_K D(x)\cdot\sigma(dx)$. Sind $Z^1, Z^2, \ldots$ $\mathfrak{K}$-Unterteilungen von X mit $\lim_{m\to\infty} d(G_0;Z^m) = 0$ für jedes $G_0 \in \mathfrak{G}\cdot\mathfrak{K}$, so existieren $\lim_{m\to\infty} S_1(Z^m)$, $\lim_{m\to\infty} S_2(Z^m)$ und $\lim_{m\to\infty} S_{3,i}(Z^m)$. Es gelten dann weiter die Gleichungen

$$\lim_{m\to\infty} S_1(Z^m) = \int_X F(x)\cdot D(x)\cdot G(x)\cdot\sigma(dx) \quad ,$$

$$\lim_{m\to\infty} S_2(Z^m) = \int_X \sqrt{D(x)}\cdot F(x)\cdot\sqrt{D(x)}\cdot\sigma(dx)$$

und, wenn $l_1(x), \ldots, l_n(x)$ die $\mathfrak{K}$-meßbaren Eigenwerte der positiv semidefiniten, $\mathfrak{K}$-meßbaren Matrixfunktion $D(x)$ sind,

$$\lim_{m\to\infty} S_{3,i}(Z^m) = \int_X f(x)\cdot l_i(x)\cdot\sigma(dx) \quad .$$

Die Aussagen über $\lim_{m\to\infty} S_1(Z^m)$ sind unmittelbar einzusehen.

Den Beweis für Satz (4.6) kann man fast wörtlich als Beweis für die Existenz von $\lim_{m\to\infty} S_2(Z^m)$ und für die Gleichung

$$\lim_{m\to\infty} S_2(Z^m) = \int_X \sqrt{D(x)}\cdot F(x)\cdot\sqrt{D(x)}\cdot\sigma(dx)$$

übernehmen, da die Verallgemeinerungen der dort benutzten Sätze (3.2) und (3.3) gelten.

Den Beweis für die Aussagen über $\lim_{m\to\infty} S_{3,i}(Z^m)$ führt man in den gleichen Schritten wie früher. Es ist dabei nur Hilfssatz (5.3) an Stelle von Satz (3.9) zu verwenden. Wir führen diese Beweisschritte hier nicht alle durch, sondern zeigen nur kurz, wie man eine Ungleichung erhält, die der Ungleichung in Beweisteil 3 zu Satz (4.9) entspricht:

Wegen der Kompaktheit von X können wir $f(x)\equiv 1$ voraussetzen. Es seien $Z: I_1 + \ldots + I_r = X$ eine

$\mathfrak{K}$-Unterteilung von X und Z^1, Z^2, ... eine den Voraussetzungen von Satz (5.4) genügende Folge von $\mathfrak{K}$-Unterteilungen.

Setzen wir $B_\varphi := I_\varphi$, $p := r$ und $K_1 := K_2 := \ldots = X$, so gibt es nach Hilfssatz (5.2) Mengen J_1^m, ..., J_p^m, die Vereinigungsmengen gewisser I_ϱ^m sind, und die den dort angegebenen Relationen genügen. Für $m \geq m(\varepsilon)$ gilt also

$$\sum_{\varrho=1}^{r} \sigma(I_\varrho \cdot \overline{J_\varrho^m}) < \varepsilon$$

und damit

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{j} S_{3,i}(Z) &= \sum_{i=1}^{j} \sum_{\varrho=1}^{r} l_i(C(I_\varrho)) \\
&< \sum_{i=1}^{j} \sum_{\varrho=1}^{r} l_i(C(I_\varrho \cdot J_\varrho^m)) + \varepsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{j} \sum_{\varrho=1}^{r} l_i(C(J_\varrho^m)) + \varepsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{j} \sum_{\varrho=1}^{r(m)} l_i(C(I_\varrho^m)) + \varepsilon \\
&= \sum_{i=1}^{j} S_{3,i}(Z^m) + \varepsilon \ .
\end{aligned}$$

Diese Verallgemeinerung zeigt, wie wenig wir bei unseren früheren Beweisen die Tatsache benutzt haben, daß C(t), F(t), G(t) und f(t) über einem abgeschlossenen Intervall des R^1 definiert sind.

Durch Spezialisierung erhält man aus Satz (5.4) sofort die Existenzsätze von § 4 für den Fall, daß C(t) entweder über [a,b] von rechts stetig oder von links stetig ist.

Literaturverzeichnis.

(1) Aumann, G.: Reelle Funktionen. Berlin 1954.

(2) Bellman, R.: On a generalization of the Stieltjes integral to matrix functions. Rend. d. Circ. Mat. di Palermo, Serie II 5, 181 - 186 (1956).

(3) Bellman, R.: On positive definite matrices and Stieltjes integrals. Rend. d. Circ. Mat. di Palermo, Serie II 6, 254 - 258 (1957).

(4) Bourbaki, N.: Éléments de mathématique. I. Les structures fondamentales de l'analyse. Livre VI: Intégration. Chapitre 5 : Intégration des mesures. Paris 1956.

(5) Fan, K.: On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformation - I. Proc. Nat. Acad. Sci. 35, 652 - 655 (1949).

(6) Halmos, P.R.: Measure theory. New York 1950.

(7) Kamke, E.: Das Lebesgue-Stieltjes-Integral. Leipzig 1956.

(8) Kowalewski, G.: Lehrbuch der höheren Mathematik für Universitäten und Technische Hochschulen. Berlin - Leipzig 1933.

(9) Löwner, K.: Über monotone Matrixfunktionen. Math. Zeitschrift 38, 177 - 216 (1934).

(10) Richter, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie. Berlin 1956.

(11) Ridder, J.: Über Perron-Stieltjessche und Denjoy-Stieltjessche Integrationen. Math. Zeitschrift 40, 127 - 160 (1936).

L e b e n s l a u f .

Am 31. Mai 1935 wurde ich als Sohn des Bankbeamten Vitus Fieger und dessen Ehefrau Klara, geb. Winklmann, in Passau geboren.

Nach dem Besuch der Volksschule in München und in Bissingen im Landkreis Dillingen/Donau trat ich zu Beginn des Schuljahres 1945/46 in das Ludwigs-Gymnasium in München ein. An diesem humanistischen Gymnasium bestand ich im Juni 1953 die Reifeprüfung. Zu Beginn des Wintersemesters 1953/54 ließ ich mich an der Universität München immatrikulieren. Neben Mathematik als Hauptfach hörte ich Vorlesungen über Physik, Staatswissenschaften und Recht. In den Jahren 1954, 1955 und 1956 arbeitete ich jeweils während der Semesterferien als Werkstudent. Im Februar 1956 legte ich die Diplom-Vorprüfung und im Juli 1958 die Diplom-Hauptprüfung in Mathematik, wirtschaftswissenschaftliche Richtung, an der Universität München ab.

Seit 1. Oktober 1958 bin ich bei der Witwen- und Waisen-Kasse, München, beschäftigt. Um an meiner Dissertation arbeiten zu können, ließ ich mich von dieser Versicherungsanstalt mehrmals beurlauben.

Während meines 10-semestrigen Studiums an der Universität München hörte ich Vorlesungen bei Frau Professor Dr. Beckmann, bei den Herren Professoren Dr. Anderson, Dr. Aumann, Dr. Böhm, Dr. Fischer, Dr. Gerlach, Dr. Löhlein, Dr. Pfister, Dr. Richter, Dr. Rößle, Dr. R. Schmidt, Dr. Seebach, Dr. Stein, Geh. Reg.-Rat Dr. Tietze und bei den Herren Dr. Härlen und Dr. Thoma. Ihnen allen möchte ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen. Besonders zu Dank verpflichtet bin ich Herrn Professor Dr. Richter für das mir von ihm vermittelte Wissen und für das rege Interesse am Zustandekommen dieser Arbeit.

München, den 2. Juni 1961.

Werner Fieger.